Yhtälön numeerinen ratkaiseminen

Kaikissa tapauksissa ei pystytä ratkaisemaan yhtälön tarkkoja arvoja. Näissä tapauksissa voidaan hyödyntää yhtälön ratkaisujen likiarvoja. Esiteltävät tavat ovat puolitusmenetelmä, Newtonin menetelmä ja kiintopistemenetelmä. (Harsunkorpi ym., 2023, luku 15; Hähkiöniemi ym., 2021, luku 4.5)

Tehtävät esitellään aluksi GeoGebran avulla havainnollistamisen vuoksi, minkä jälkeen ne käsitellään taulukkolaskentaohjelmalla, jolla saadaan lopullinen vastaus. Sivustolla on linkit näihin taulukoihin.

Pyöristäminen ja likiarvot

Tehtävissä ilmoitetaan yleensä, millä tarkkuudella vastaus halutaan. Jos esimerkiksi pyydetään tarkkuutta neljään desimaaliin, on varmistettava, ettei vertailtavien lukujen viisi viimeistä desimaalia enää muutu. Poikkeustapauksissa viimeinen numero ei pyöristy oikein. Esimerkiksi $a = 0.045$ ... ja $b = 0.044$ ... pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella 0.05 ja 0.04 riippumatta siitä, kuinka kapea väli on. Nollakohdan oikea kaksidesimaalinen likiarvo on kumpi vaan. (Harsunkorpi ym., 2023, s. 166–167)

Molemmat ohjelmat on asetettu pyöristämään tulokset kolmeentoista desimaaliin. GeoGebrassa pyöristyksen asetukset löytyvät painamalla oikean reunan ylimmästä symbolista. LibreOffice Calcissa pyöristys on toteutettu lisäämällä kaavaan =PYÖRISTÄ (; 13).

1. Puolitusmenetelmä (MAA6)

”Jos jatkuva funktio saa välin päätepisteissä erimerkkiset arvot, niin funktion kuvaaja leikkaa x-akselin tällä välillä ainakin kerran ja funktiolla on tällä välillä ainakin yksi nollakohta” (Harsunkorpi ym., 2023, luku 15, sivu 160).

Eli välissä]a, b[on nollakohta, jos välin [a, b] päätepisteet ovat erimerkkiset.

[a, b] välin puolittamiseksi valitaan lopuksi uusi keskipiste c. Valitse se niin, että a = a ja b = c. Jos molemmat ovat joko positiivisia tai negatiivisia vaihda a = c ja b = b. Keskipiste lasketaan kaavalla $\mathrm{c} = \frac{\mathrm{a+b}}{2}$.

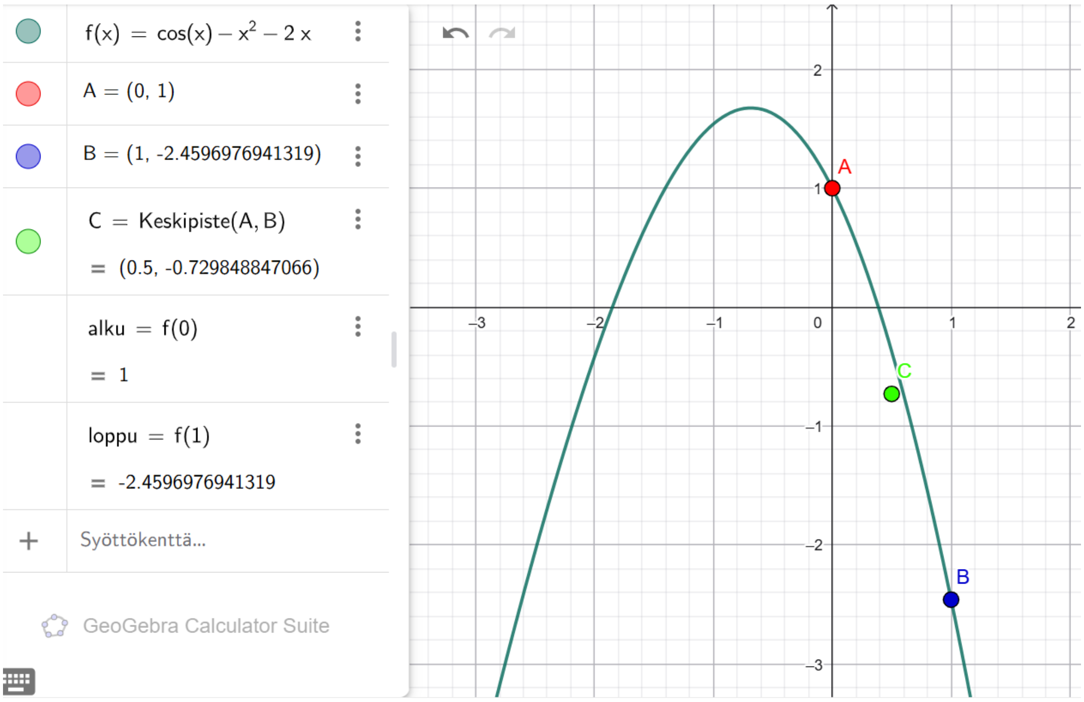
Nollakohtia etsitään x-akselilta, joten laskuissa käytetään x:n arvoja. Y:n arvoja hyödynnetään tarkistamaan, ovatko funktion arvot erimerkkiset sekä esimerkissä havainnollistamaan tilannetta graafisesti.

Ennen menetelmän soveltamista on varmistettava, että yhtälöllä f(x) = 0 on ratkaisu.

1. Etsi puolitusmenetelmällä yhtälön $f(x) = cos(x) - x^2 - 2x$ positiivisen nollakohdan neljän desimaalin tarkkuudella likiarvo.

Funktio on määriteltynä nimellä $f(x)$, johon sijoitetaan arvot. A kuvastaa tarkasteltavan välin alkupistettä, B välin loppupistettä ja C on näiden kahden pisteen keskiarvoa.

Valitaan väliksi]0,1[, sillä funktio saa erimerkkiset arvot välin [0,1] päätepisteissä.



Kuvaselitys: Kuvassa on alaspäin aukeavan paraabelin näköinen funktio. Kuvassa näkyvät visuaalisesti pisteet A, B ja C, mutta tehtävän ratkaisemisen kannalta olennaisimmat asiat löytyvät tekstimuodossa.

funktio $f(x) = cos(x) - x^2 - 2x$, johon sijoitettiin 0 ja 1:

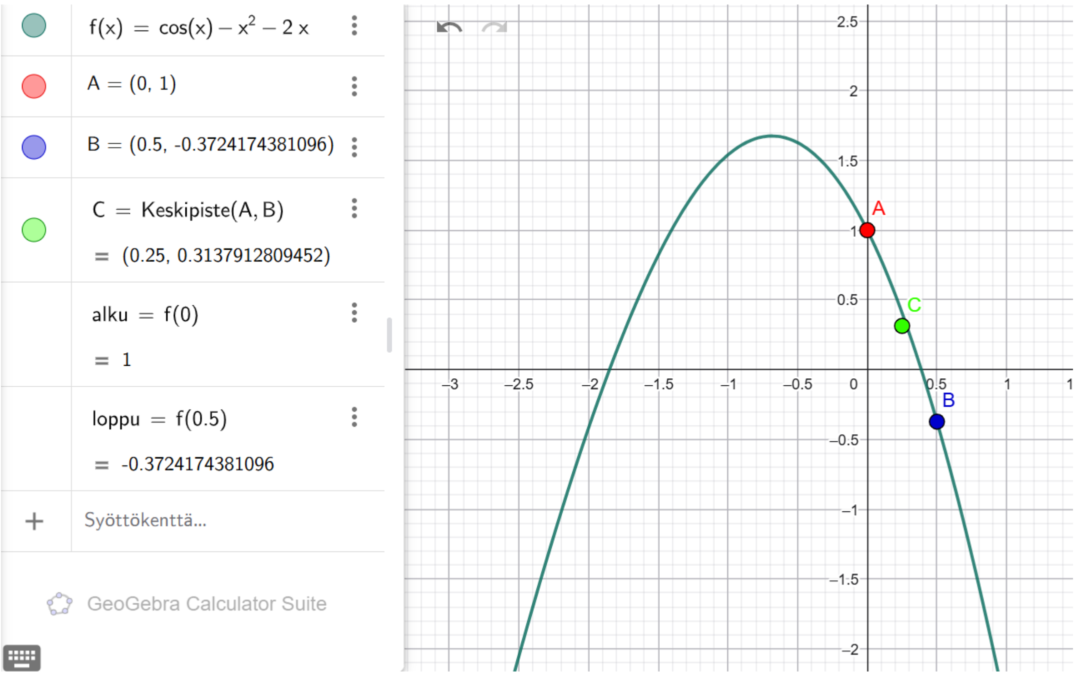
alku: $f\ (0)\ = 1$

loppu: $f\ (1)\ = -2.4596976941319$

Huomataan, että tulokset ovat erimerkkisiä (+ ja -), joten lasketaan 0 ja 1 avulla keskiarvo:

keskipiste*:* $x\ = \frac{0+1}{2}\ = \ 0.5$

2. Valitaan tarkasteluvälin keskipiste uudeksi päätepisteeksi eli 0.5. (1 ja 0 keskiarvo on 0.5). Tarkistetaan saako funktio erimerkkiset tulokset välin päätepisteissä [0, 0.5] ja valitaan sitten uusi keskipiste. Tätä vaihetta toistetaan, kunnes löydetään tarpeeksi samanlaiset likiarvot.

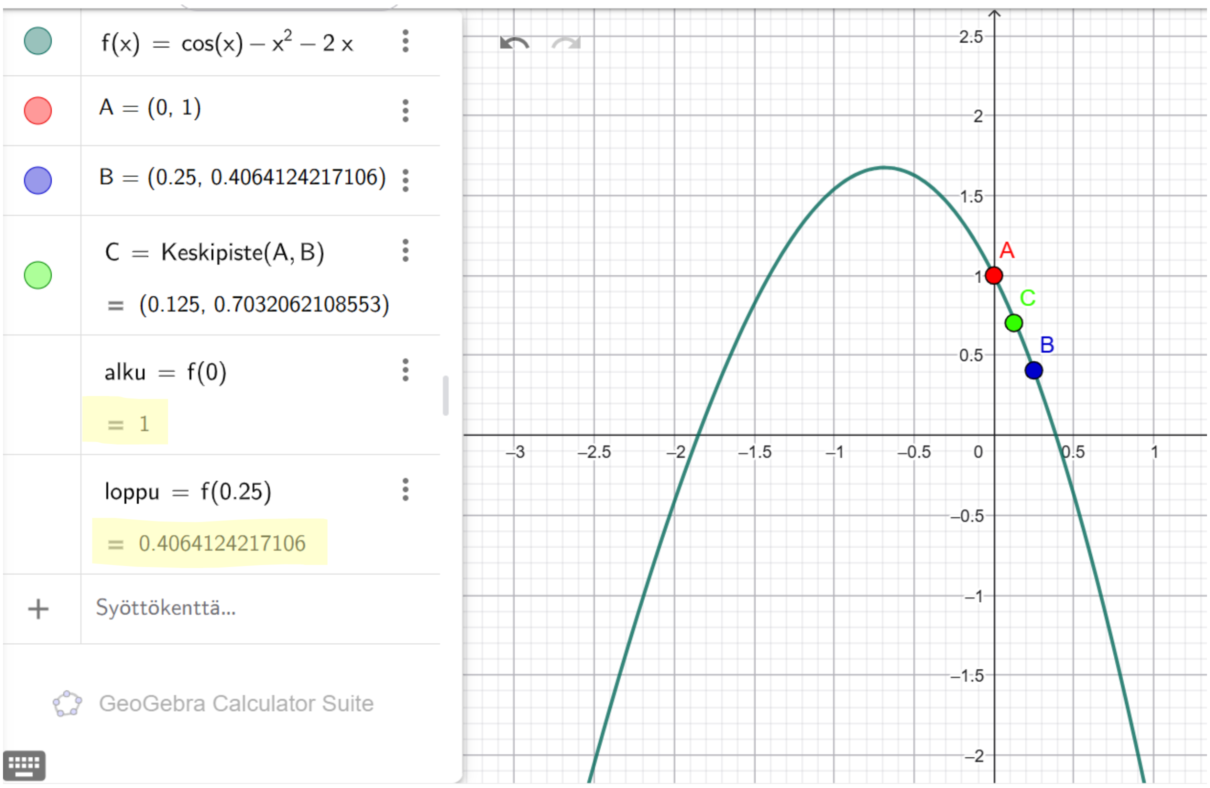


alku: $f\ (0)\ = 1$

loppu: $f\ (0.5)\ =\ -0.3724174381096$

keskipiste: $\frac{0+0.5}{2} = 0.25$

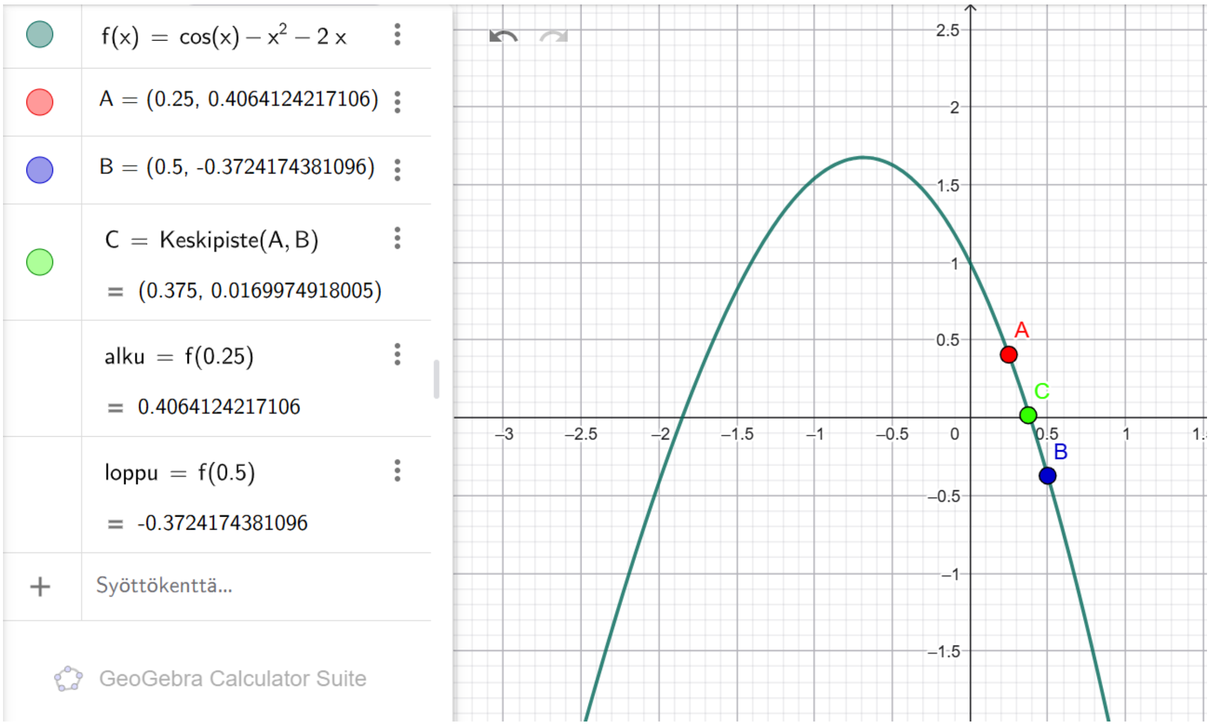
3. Valitaan uudeksi päätepisteeksi 0.25. Tarkastellaan väliä [0, 0.25]



alku: f $(0)\ = 1$

loppu: f $(0.25)\ = 0.4064124217106$

Päädyimme tilanteeseen, että molemmat tulokset ovat positiivisia. Vaihdetaan a = c, ja b = b eli [0.25, 0.5]

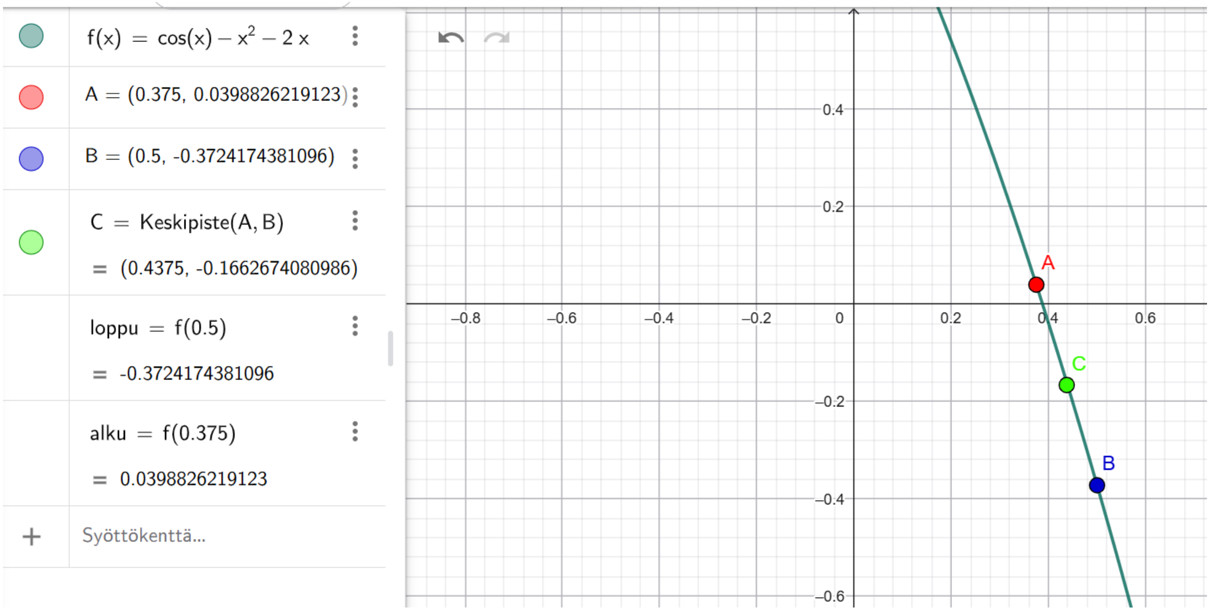


alku: $f\ (0.25)\ = 0.4064124217106$

loppu: $f\ (0.5)\ = -0.3724174381096$

keskipiste $= \frac{0.25+0.5}{2} = 0.375$

4. Välillä $[0.25, 0.375]$ molemmat ovat positiivisia, joten vaihdetaan [0.375,0.5]

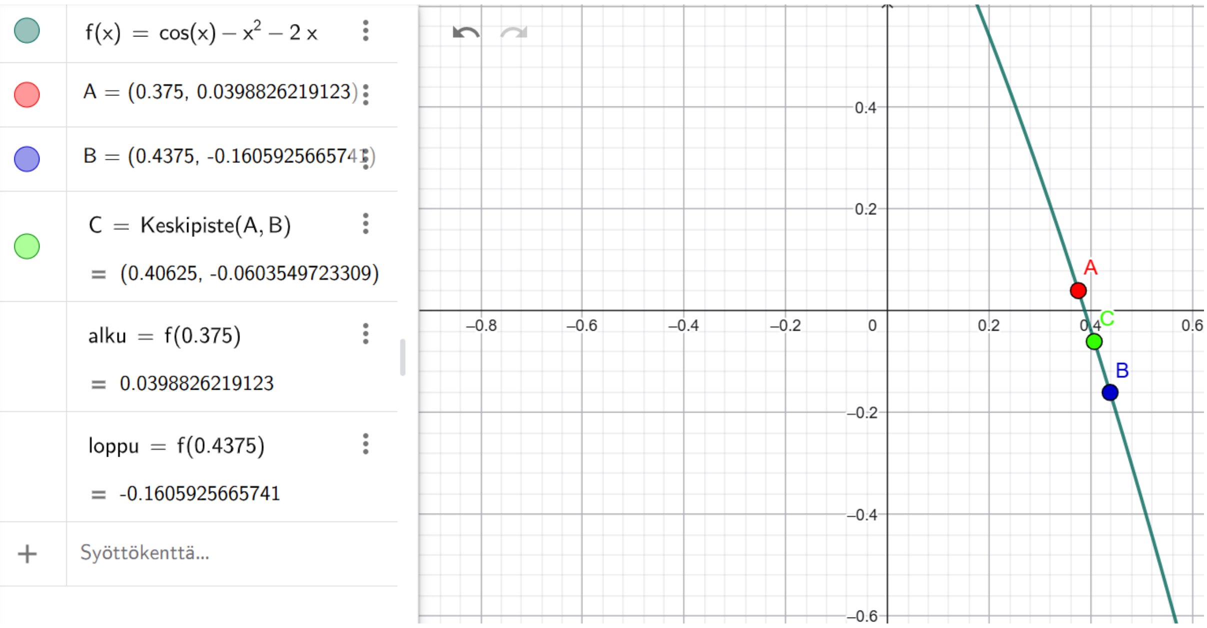


alku: $f\ (0.375)\ =\ 0.0398826219123$

loppu: $f\ (0.5)\ = -0.3724174381096$

keskipiste: 0.4375

5. $[0.375, 0.4375]$

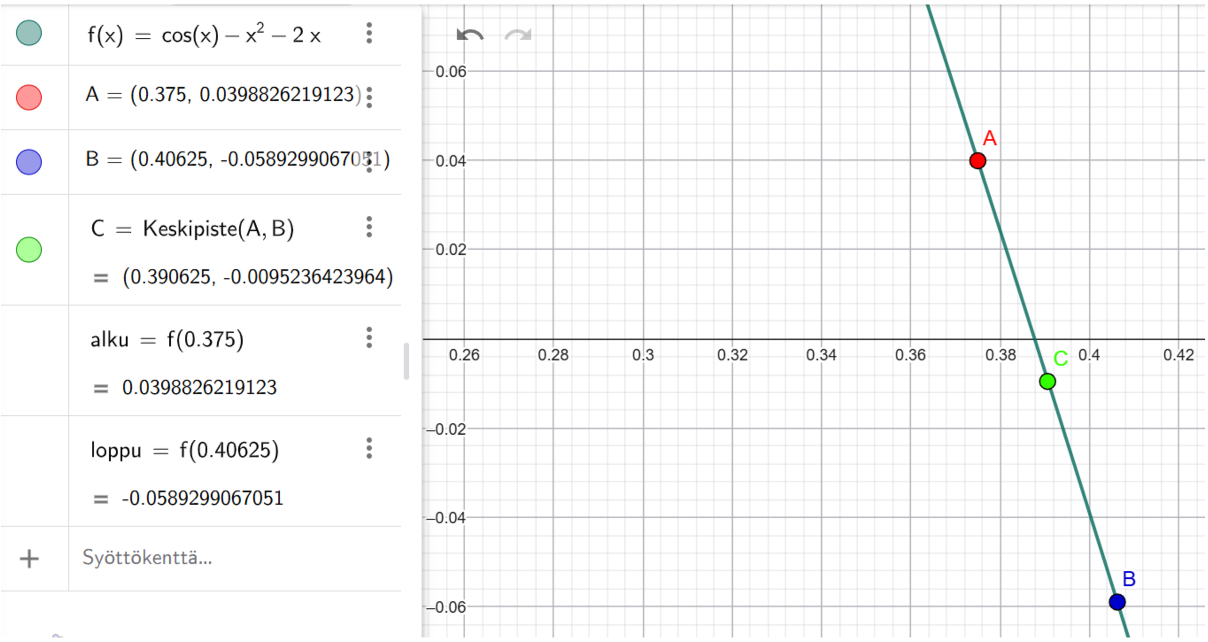


alku: $f\ (0.375)\ =\ 0.0398826219123$

loppu: $f\ (0.4375)\ =\ -0.1605925665741$

keskipiste: 0.40625

6. $[0.375, 0.40625]$

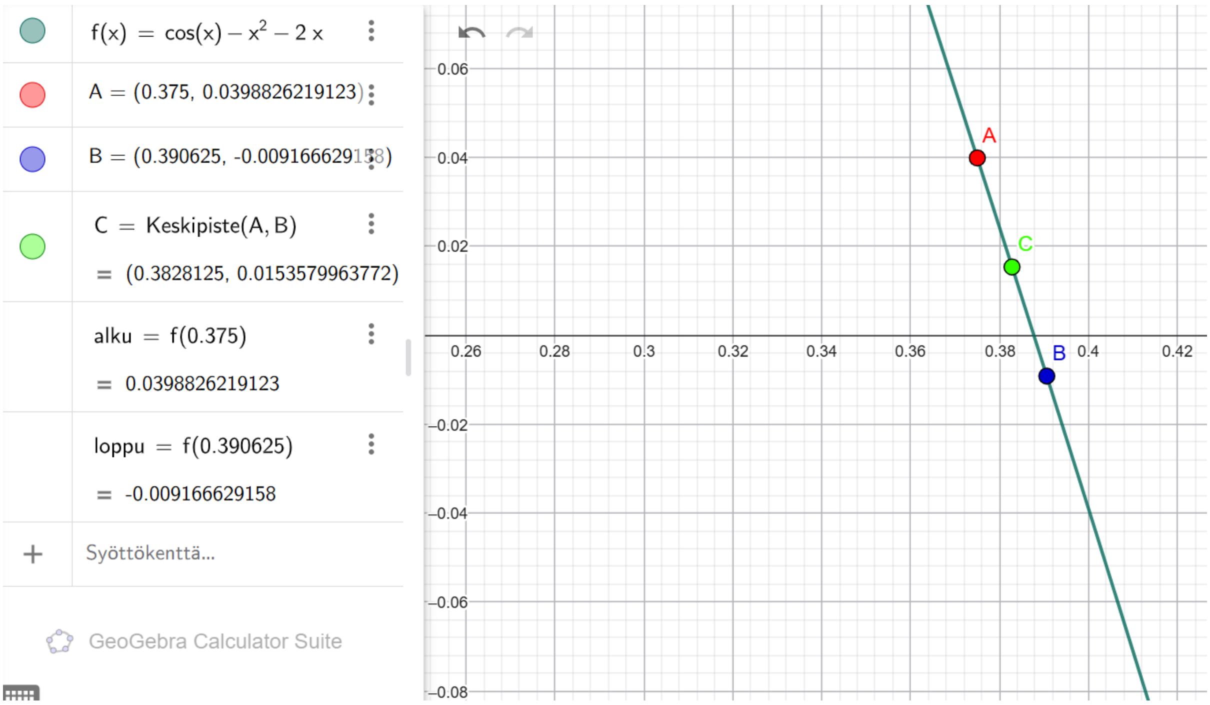


alku: $f\ (0.375)\ =\ 0.0398826219123$

loppu: $f\ (0.40625)\ =\ -0.0589299067051$

keskipiste: 0.390625

7. $[0.375, 0.390625]$

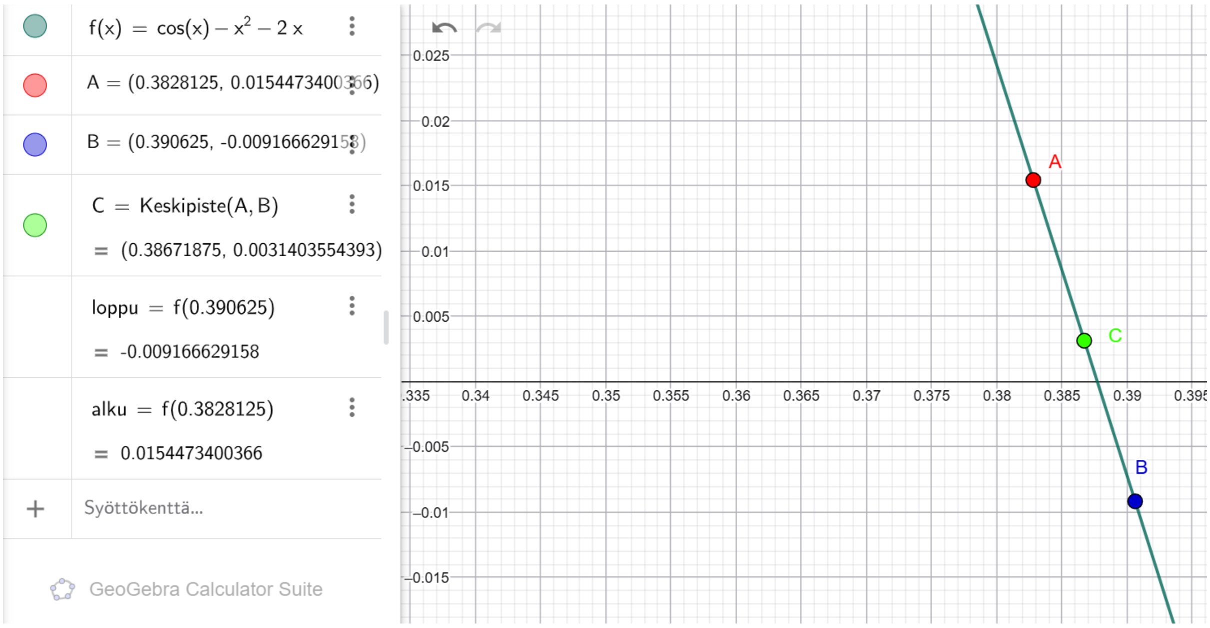


alku: $f\ (0.375)\ =0.0398826219123$

loppu: $f\ (0.390625) = -0.009166629158$

keskipiste: 0.3828125

8. Molemmat tulokset olivat positiivisia ja vaihdetaan väliksi $[0.3828125, 0.390625]$

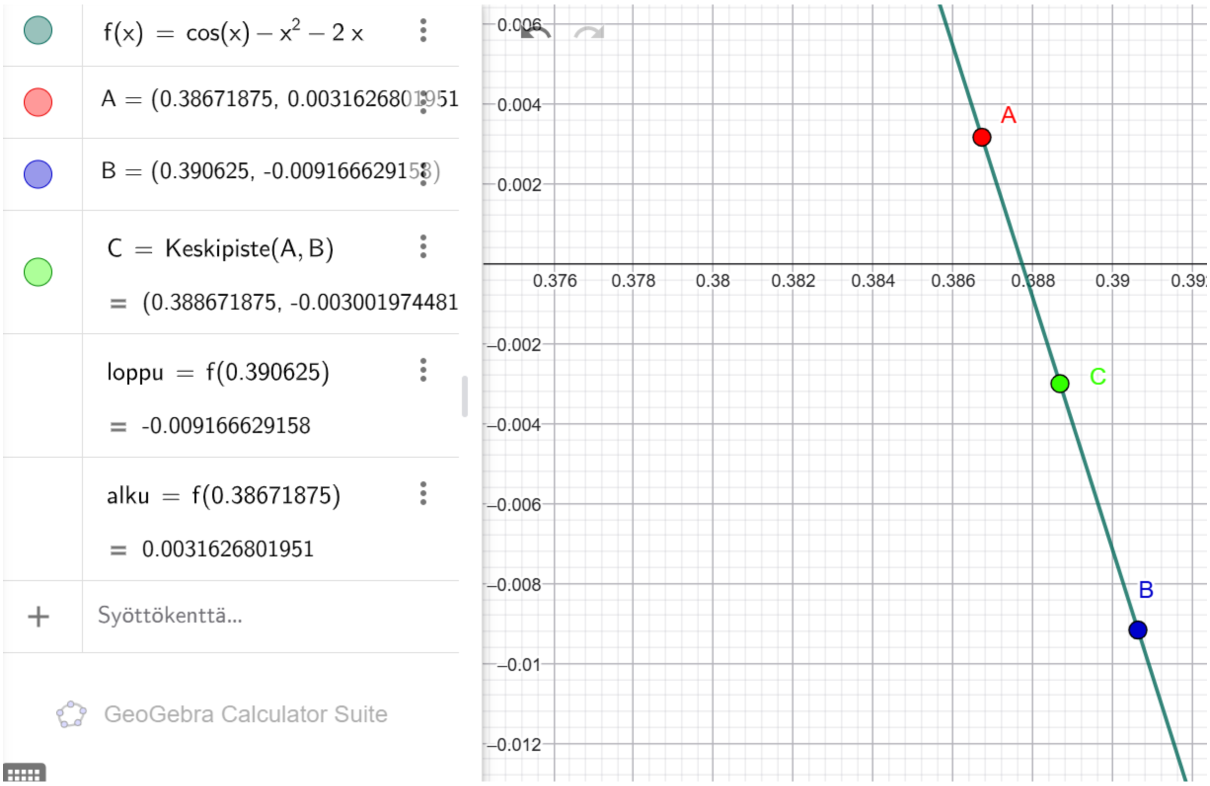


alku: $f\ (0.3828125)\ =\ 0.0154473400366$

loppu: $f\ (0.390625)\ =\ -0.009166629158$

keskipiste: 0.38671875

9. Molemmat tulokset olivat positiivisia ja vaihdetaan väliksi $[0.38671875, 0.390625]$

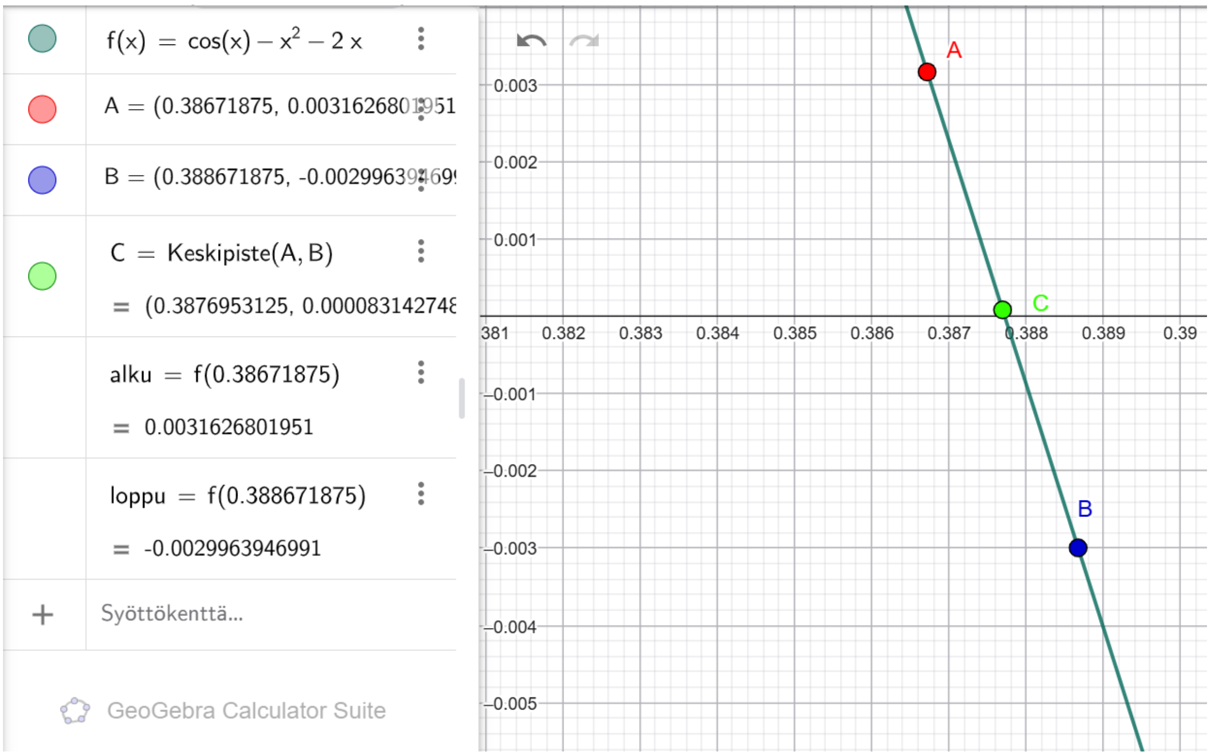


alku: $f\ (0.38671875)\ =\ 0.0031626801951$

loppu: $f\ (0.390625)\ =\ -0.009166629158$

keskipiste: 0.388671875

10. $[0.38671875, 0.388671875]$



alku: $f(0.38671875) = 0.0031626801951$

loppu: $f(0.388671875) = -0.0029963946991$

keskipiste: 0.3876953125

Jatketaan taulukkolaskennalla laskemiseen.

Taulukkolaskennalla

Taulukon alku on:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Alku	Loppu	Keskipiste	Alku: tulos	Loppu: tulos	Keskipiste: tulos	Väli	Uusi alku	Uusi loppu
2	0	1	0,5	1	-2,4596976941319	-0,3724174381096	ac	0	0,5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Alku	Loppu	Keskipiste	Alku: tulos	Loppu: tulos	Keskipiste: tulos	Väli	Uusi alku	Uusi loppu
2	0	1	0,5	1	-2,4596976941319	-0,3724174381096	ac	0	0,5

Soluissa on: A2: 0, B2: 1, C2: =PYÖRISTÄ((A2+B2)/2;13), D2: =PYÖRISTÄ(COS(A2)-A2^2-2*A2; 13), E2: =PYÖRISTÄ(COS(B2)-B2^2-2*B2;13), F2: =PYÖRISTÄ(COS(C2)-C2^2-2*C2;13), G2: =JOS(D2*F2<0;"ac";"cb"), H2: =JOS(G2="ac";A2;C2) ja I2: =JOS(G2="ac";C2;B2).

Eli sarake A on alkupiste, B on loppupiste ja C on keskipiste. D, E, F sisältävät funktion lausekkeen, johon sijoitetaan vastaavasti arvot A, B ja C. Jatkuvalla funktiolla on vähintään yksi ratkaisu pisteiden A ja B välillä, jos funktion arvot näissä pisteissä ovat erimerkkiset eli jos $f(A) \cdot f(B) < 0$. Sarake G tarkastaa funktion arvojen etumerkit siten, että jos funktion arvojen tulo alkupisteessä ja keskipisteessä on negatiivinen, ratkaisu sijaitsee välillä A–C. Muussa tapauksessa ratkaisu sijaitsee välillä C–B. Jos väli on A–C, vaihdetaan B:n tilalle laskettu keskipiste. Muussa tapauksessa vaihdetaan A:n tilalle keskipiste. (Kaw, 2023)

Rivillä 3 soluissa on A3: = H2 ja B3: = I2. Tämän jälkeen vedä jokaisen sarakkeen reunasta alaspäin esimerkiksi riville 25.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Alku	Loppu	Keskipiste	Alku: tulos	Loppu: tulos	Keskipiste: tulos	Väli	Uusi alku	Uusi loppu
2	0	1	0,5	1	-2,4596976941319	-0,3724174381	ac	0	0,5
3	0	0,5	0,25	1	-0,3724174381096	0,40641242171	cb	0,25	0,5
4	0,25	0,5	0,375	0,4064124217106	-0,3724174381096	0,03988262191	cb	0,375	0,5
5	0,375	0,5	0,4375	0,0398826219123	-0,3724174381096	-0,1605925666	ac	0,375	0,4375
6	0,375	0,4375	0,40625	0,0398826219123	-0,1605925665741	-0,0589299067	ac	0,375	0,40625
7	0,375	0,40625	0,390625	0,0398826219123	-0,0589299067051	-0,0091666292	ac	0,375	0,390625
8	0,375	0,390625	0,3828125	0,0398826219123	-0,009166629158	0,01544734004	cb	0,3828125	0,390625
9	0,3828125	0,390625	0,38671875	0,0154473400366	-0,009166629158	0,0031626802	cb	0,38671875	0,390625
10	0,38671875	0,390625	0,388671875	0,0031626801951	-0,009166629158	-0,0029963947	ac	0,38671875	0,388671875
11	0,38671875	0,388671875	0,3876953125	0,0031626801951	-0,0029963946991	8,453787E-05	cb	0,387695313	0,388671875
12	0,3876953125	0,388671875	0,38818359375	0,0000845378699	-0,0029963946991	-0,0014555797	ac	0,387695313	0,38818359375
13	0,3876953125	0,38818359375	0,387939453125	0,0000845378699	-0,0014555796561	-0,0006854337	ac	0,387695313	0,38793945313
14	0,3876953125	0,387939453125	0,3878173828125	0,0000845378699	-0,0006854337007	-0,0003004261	ac	0,387695313	0,38781738281
15	0,3876953125	0,3878173828125	0,3877563476563	0,0000845378699	-0,000300426117	-0,0001079387	ac	0,387695313	0,38775634766
16	0,3876953125	0,3877563476563	0,3877258300782	0,0000845378699	-0,000107938674	-1,169904E-05	ac	0,387695313	0,38772583008
17	0,3876953125	0,3877258300782	0,3877105712891	0,0000845378699	-0,0000116990398	3,6419756E-05	cb	0,387710571	0,38772583008
18	0,3877105712891	0,3877258300782	0,3877182006837	0,0000364197557	-0,0000116990398	1,2360443E-05	cb	0,387718201	0,38772583008
19	0,3877182006837	0,3877258300782	0,3877220153809	0,0000123604429	-0,0000116990398	0,000000330723	cb	0,387722015	0,38772583008
20	0,3877220153809	0,3877258300782	0,3877239227296	0,000000330723	-0,0000116990398	-5,684153E-06	ac	0,387722015	0,38772392273
21	0,3877220153809	0,3877239227296	0,3877229690553	0,000000330723	-0,0000056841532	-2,676714E-06	ac	0,387722015	0,38772296906
22	0,3877220153809	0,3877229690553	0,3877224922181	0,000000330723	-0,0000026767139	-1,172995E-06	ac	0,387722015	0,38772249222
23	0,3877220153809	0,3877224922181	0,3877222537995	0,000000330723	-0,0000011729951	-4,21136E-07	ac	0,387722015	0,3877222538
24	0,3877220153809	0,3877222537995	0,3877221345902	0,000000330723	-0,000000421136	-4,52065E-08	ac	0,387722015	0,38772213459
25	0,3877220153809	0,3877221345902	0,3877220749856	0,000000330723	-0,0000000452065	1,427581E-07	cb	0,387722075	0,38772213459

Alla olevassa taulukossa on vain välin alku- ja loppuarvot.

Alku	Loppu
0	1
0	0,5
0,25	0,5
0,375	0,5
0,375	0,4375
0,375	0,40625
0,375	0,390625
0,3828125	0,390625

0,38671875	0,390625
0,38671875	0,388671875
0,3876953125	0,388671875
0,3876953125	0,38818359375
0,3876953125	0,387939453125
0,3876953125	0,3878173828125
0,3876953125	0,3877563476563
0,3876953125	0,3877258300782
0,3877105712891	0,3877258300782
0,3877182006837	0,3877258300782
0,3877220153809	0,3877258300782
0,3877220153809	0,3877239227296
0,3877220153809	0,3877229690553
0,3877220153809	0,3877224922181
0,3877220153809	0,3877222537995
0,3877220153809	0,3877221345902

Huomataan, että riveillä 21 ja 22 rakenne 0.38772 ei enää muutu välin aloitus- ja lopetuspisteissä, joten vastaus voidaan pyöristää muotoon $x \approx 0.3877$.

(Harsunkorpi ym., 2023, luku 15)

Newtonin menetelmä (MAA6)

Havainnollistava materiaalia: [Newtonin menetelmä – GeoGebra]

Cheat abitin mukaan (Ylioppilastutkintolautakunta, (n.d.)):

Algoritmeja yhtälöiden ratkaisuun

Oletetaan, että f on derivoituva funktio, joka on määritelty välillä $[a, b]$ ja sen arvojoukko koostuu reaaliluvuista. *Newtonin menetelmällä* nollakohta löydetään seuraavasti. Oletetaan, että tiedossa oleva likiarvo on x_n . Siitä saadaan parempi likiarvo x_{n+1} alla seuraavan kaavan mukaisesti:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

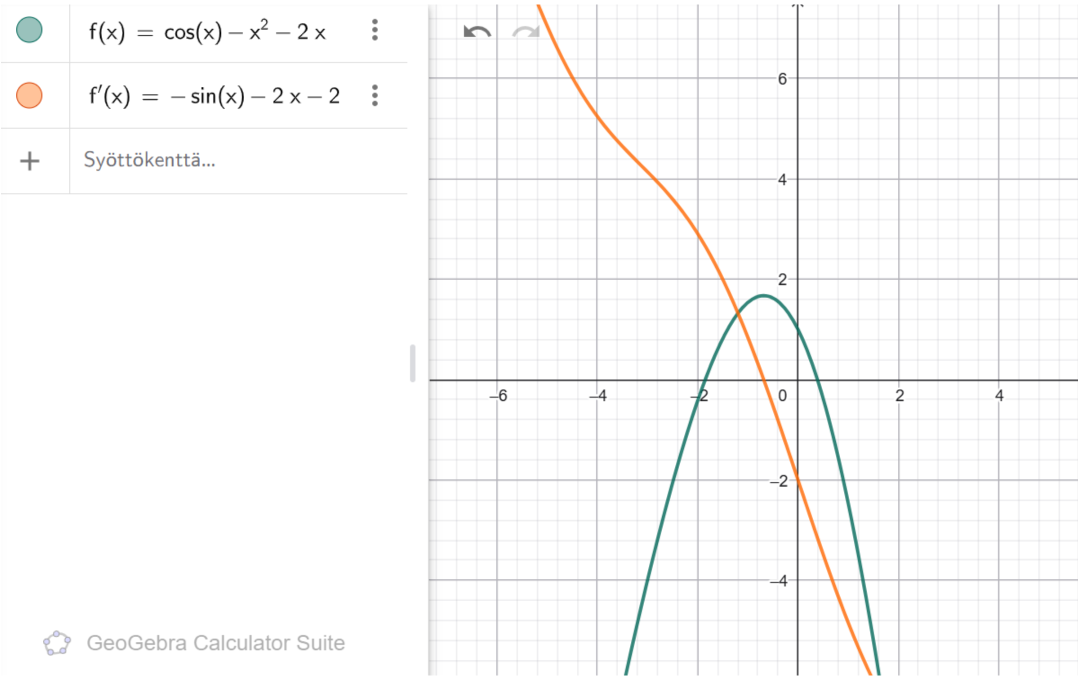
Menetelmän perusajatuksena on korvata funktion kuvaaja tarkastelupisteissä x_0, x_1, x_2 jne. tangentilla. Tässä esimerkissä Newtonin menetelmää ei kuitenkaan ole havainnollistettu tangentin avulla, vaan nollakohdan likiarvo on saatu suoraan sijoittamalla arvot Newtonin kaavaan.

Newtonin menetelmässä valitaan ensin alkuarvo x:lle, minkä jälkeen lasketaan Newtonin kaavan avulla uusi arvo. Saatu arvo sijoitetaan tämän jälkeen uudelleen Newtonin kaavaan. Laskentaa jatketaan, kunnes peräkkäiset likiarvot ovat riittävän lähellä toisiaan. Tätä tapaa kutsutaan iteroimiseksi.

Ennen menetelmän soveltamista on varmistettava, että yhtälöllä $f(x) = 0$ on ratkaisu.

1. Etsi Newtonin menetelmällä yhtälön $f(x) = cos(x) - x^2 - 2x$ positiivisen nollakohdan neljän desimaalin tarkkuudella likiarvo.

Käytetään samaa funktiota:

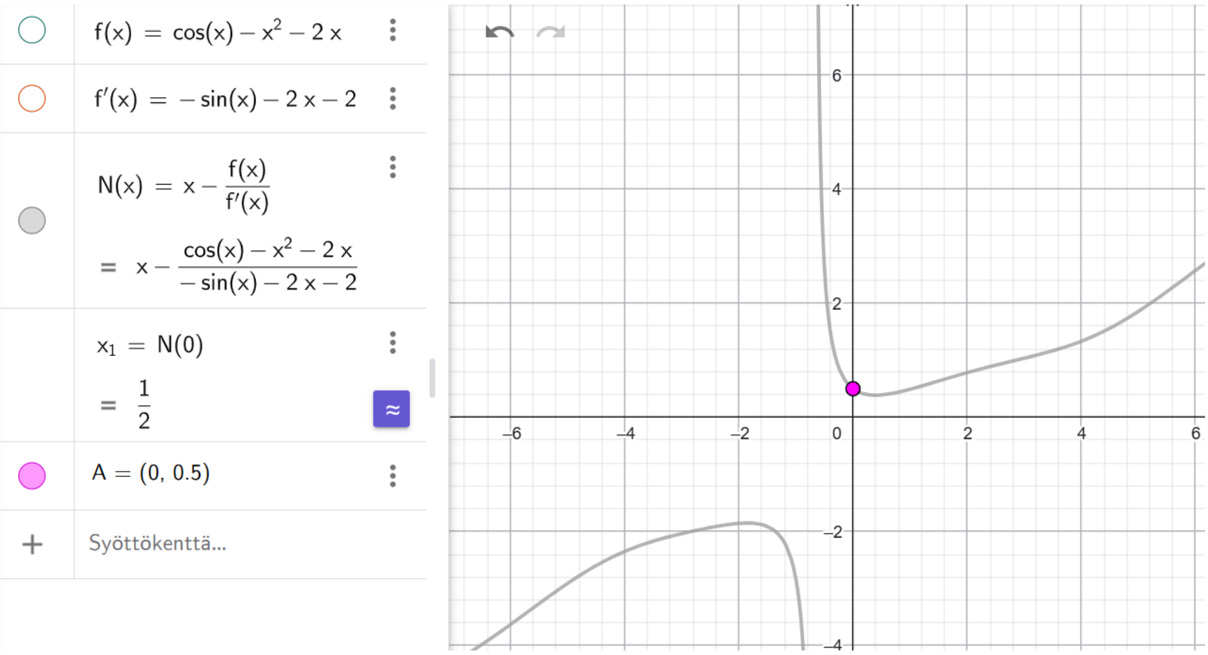


Kuvaselite: Kuvassa on edellinen funktio f(x) ja nyt sen derivaatta, jonka käyrä muistuttaa suoraa, mutta siinä on lievää kaarevuutta.

Vihreä on sama funktio $f(x) = \cos(x) - x^2 - 2x$

Oranssi on sen derivaatta $f'(x) = -\sin(x) - 2x - 2$

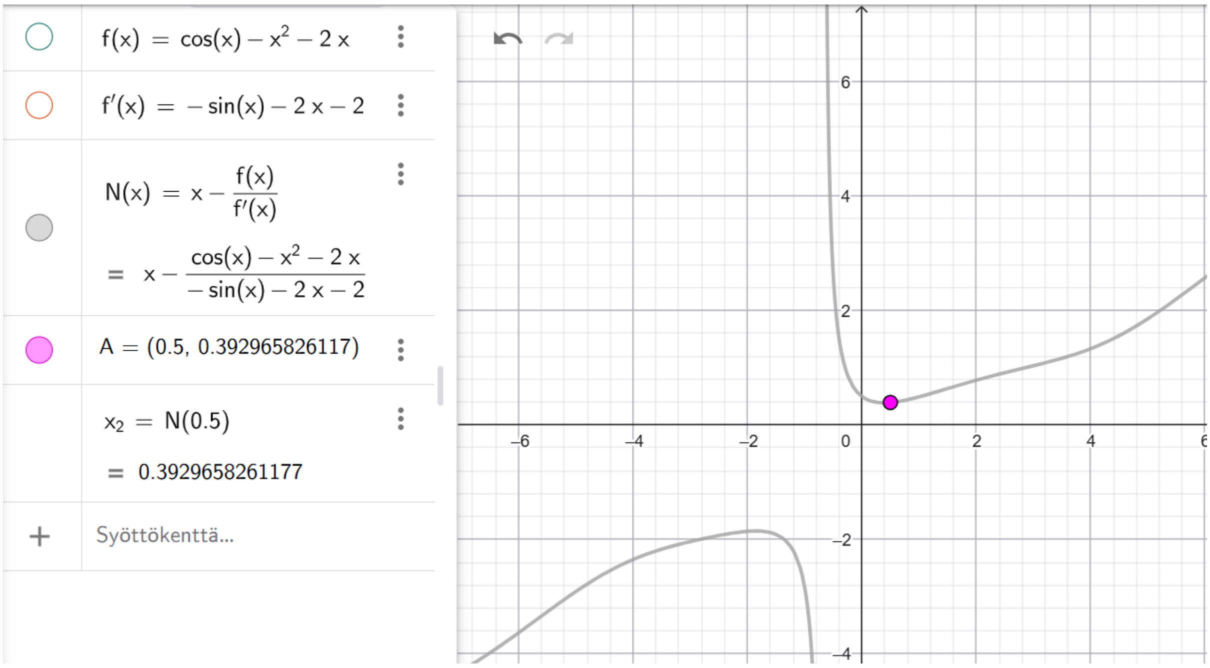
2. Aloitetaan sijoittamalla $x_0 = 0$ Newtonin lausekkeeseen.



Kuvaselite: Kuvassa on edelliset funktiot sijoitettuna Newtonin kaavaan. Kuvassa on kaksi käyrää, jossa Piste A osuu niistä ylempään.

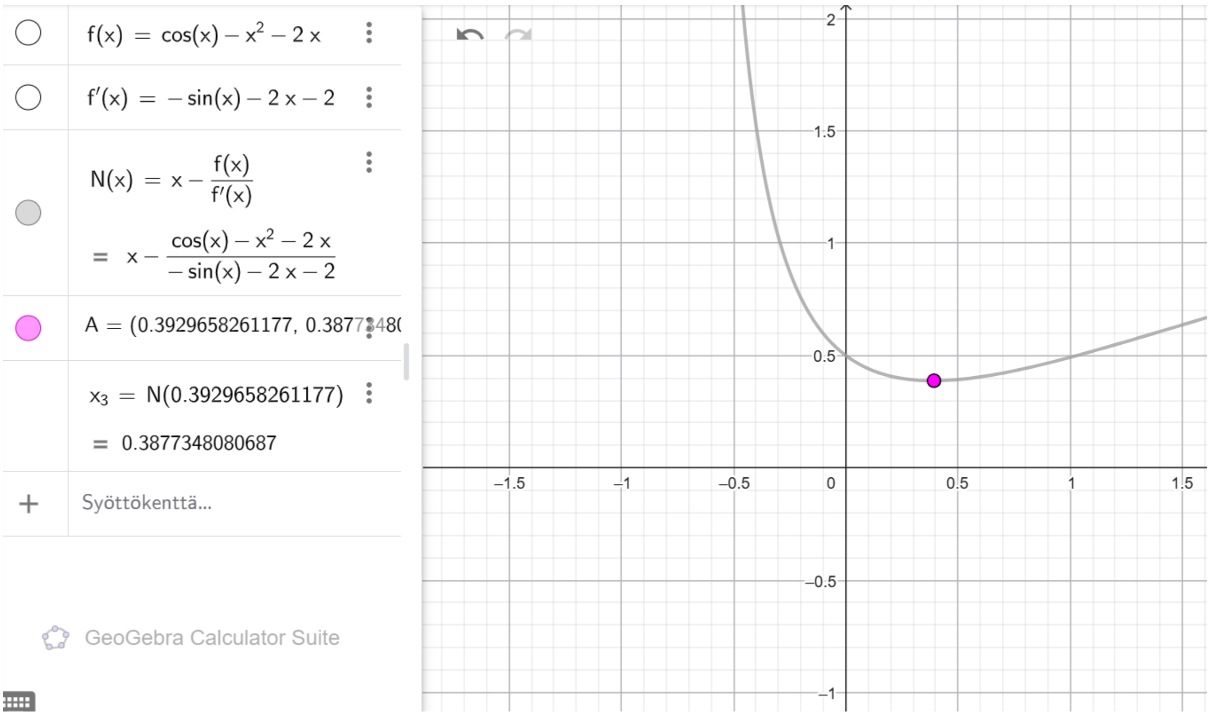
Newtonin menetelmä on $N(x) = x - \frac{f(x)}{f\prime(x)}$, johon sijoitetaan $f(x)$ ja $f'(x)$, minkä lopputuloksena on $N(x) = x - \frac{\cos(x) - x^2 - 2x}{-\sin(x) - 2x - 2}$. Kun kaavaan sijoitetaan alkuarvo $x_0 = 0$, saadaan tulokseksi likiarvo 0.5. Piste A kuvaa Newtonin menetelmään sijoitettavaa x-arvoa ja sen funktion arvoa koordinaattipisteenä.

3. Syötetään arvo $x_1 = 0.5$ Newtonin lausekkeeseen.



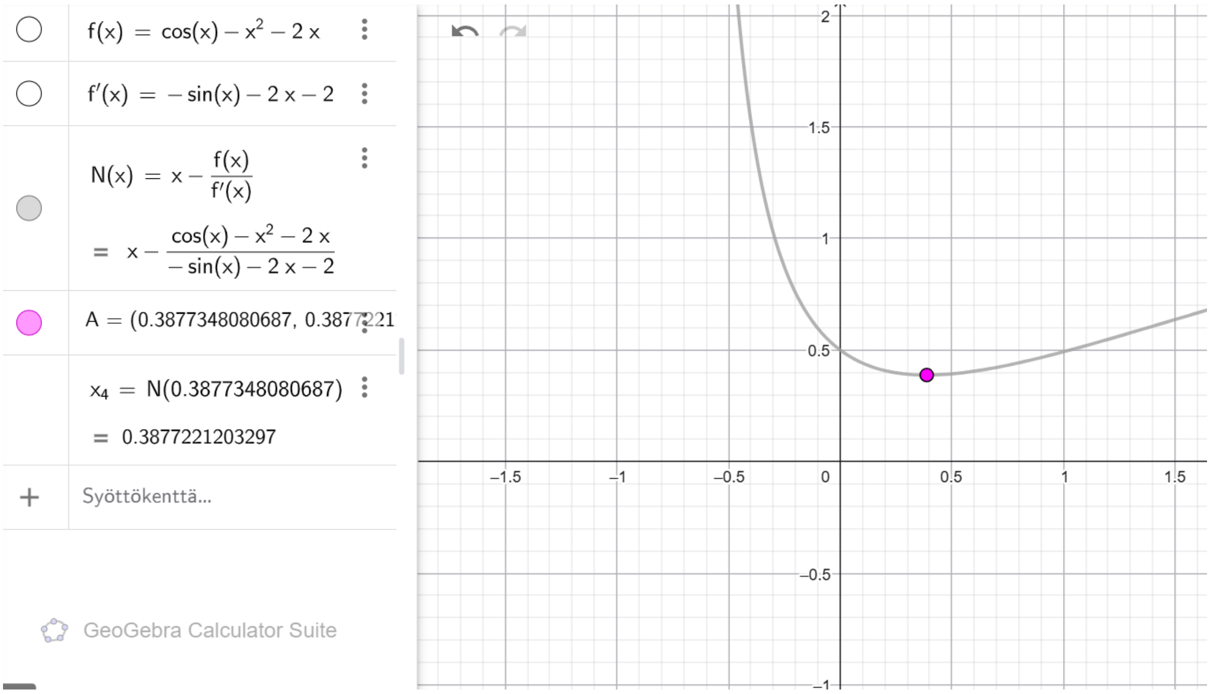
Toinen Newton-arvo on $x_2 = 0.3929658261177$. Tämä saatiin sijoittamalla alkuarvosta laskettu tulos $x_1 = 0.5$ Newtonin funktioon. Piste $\mathrm{A} = (0.5, 0.3929658261177)$ esittää tätä sijoitusta koordinaattipisteenä (x_1, x_2)

4. $x_2 = 0.3929658261177$



x3 = $N\,(0.3929658261177) = 0.3877348080687$

5. $x_3 = 0.3877348080687$



$x_4 = N\,(0.3877348080687) = 0.3877221203297$

Jatketaan taulukkolaskennalla laskemiseen.

Taulukkolaskennalla

	A	B	C	D
1	Alkuarvo	Tulos	Derivaatta	Newton
2	0	1	-2	0,5
3	0,5	-0,3724174381	-3,4794255386	0,392965826
4	0,3929658261177	-0,0165763718	-3,1688615107	0,387734808
5	0,3877348080687	-4,001157E-05	-3,1535619611	0,38772212
6	0,3877221203297	-2,356E-10	-3,1535248397	0,38772212
7	0,387722120255	0	-3,1535248395	0,38772212
8	0,387722120255	0	-3,1535248395	0,38772212
9	0,387722120255	0	-3,1535248395	0,38772212

Alkuarvo	Tulos	Derivaatta	Newton
0	1	-2	0,5
0,5	-0,3724174381096	-3,4794255386042	0,3929658261177

0,3929658261177	-0,0165763717573	-3,1688615106922	0,3877348080687
0,3877348080687	-0,0000400115712	-3,1535619611218	0,3877221203297
0,3877221203297	-2,356E-10	-3,153524839712	0,387722120255
0,387722120255	0	-3,1535248394935	0,387722120255
0,387722120255	0	-3,1535248394935	0,387722120255
0,387722120255	0	-3,1535248394935	0,387722120255

Soluissa: A2: 0, B2: =PYÖRISTÄ(COS(A2)-A2^2-2*A2;13), C2: =PYÖRISTÄ(-SIN(A2)-2*A2-2;13), D2: =PYÖRISTÄ(A2 - B2/C2;13)

Seuraavalla rivillä A3: =D2. Tämän jälkeen vedetään solujen reunoista alaspäin.

Huomataan, että Newtonin menetelmä saa arvoksi toistuvasti saman luvun. Kun iterointi ei enää muuta tulosta annetulla tarkkuudella, voidaan päätellä, että menetelmä on saavuttanut ratkaisun.

Saatu arvo $x = 0{,}387722120255$ voidaan pyöristää muotoon $x \approx 0{,}3877$.
(Hähkiöniemi ym., 2021, luku 4.5)

Kiintopistemenetelmä

Havainnollistava materiaali: [Kiintopistemenetelmä ja sen graafinen havainnollistus – GeoGebra]

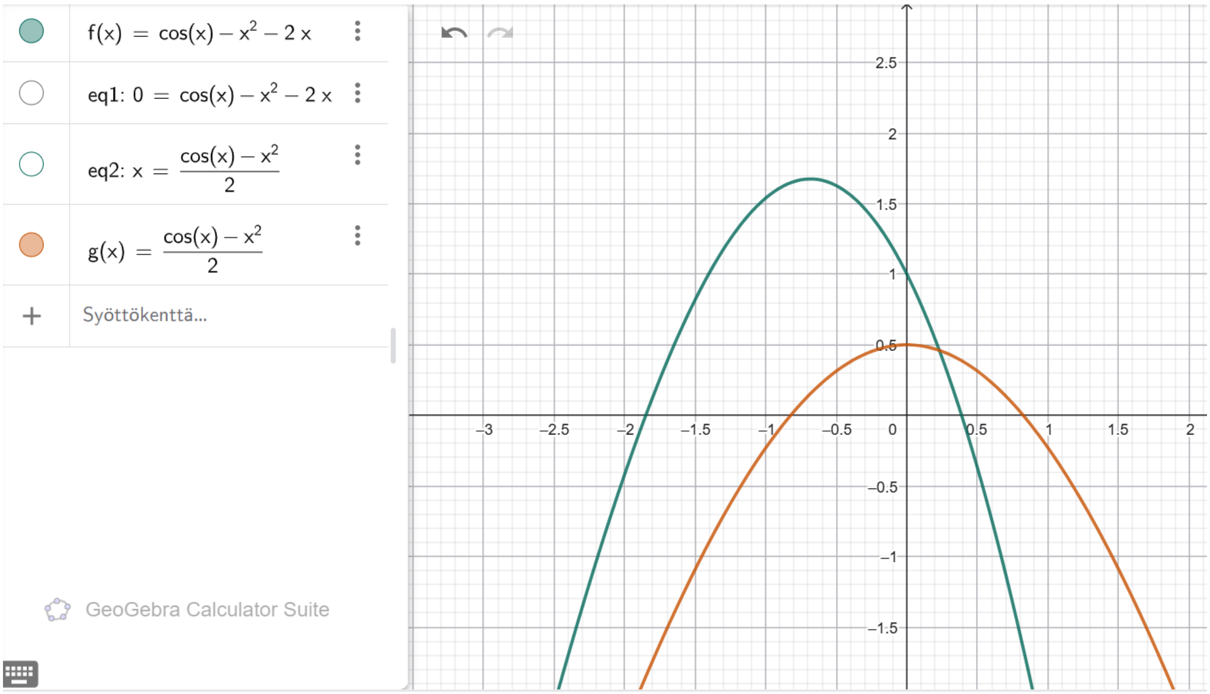
Kiintopiste eli ratkaisu on kuvaajan $y = g(x)$ ja suoran $y = x$ leikkauspisteen x-koordinaatti. Kiintopistettä voidaan käyttää muuhunkin kuin nollakohtien ratkaisemiseen.

Funktiota pitää muokata muotoon $x = g(x)$. Valitaan alkuarvo x:lle, joka sijoitetaan funktioon $g(x)$. Saatu tulos syötetään uudestaan $g(x)$:ään ja toistetaan kunnes likiarvot ovat riittävän samanlaiset.

Ennen menetelmän soveltamista on varmistettava, että yhtälöllä $g(x) = x$ on ratkaisu.

1. Etsi kiintopistemenetelmällä yhtälön $f(x) = cos(x) - x^2 - 2x$ positiivisen nollakohdan neljän desimaalin tarkkuudella likiarvo.

Yhtälön pitää olla muodossa $x = g(x)$ eli muokataan funktiota siihen muotoon. eq1 ja eq2 kuvastavat välivaiheita.



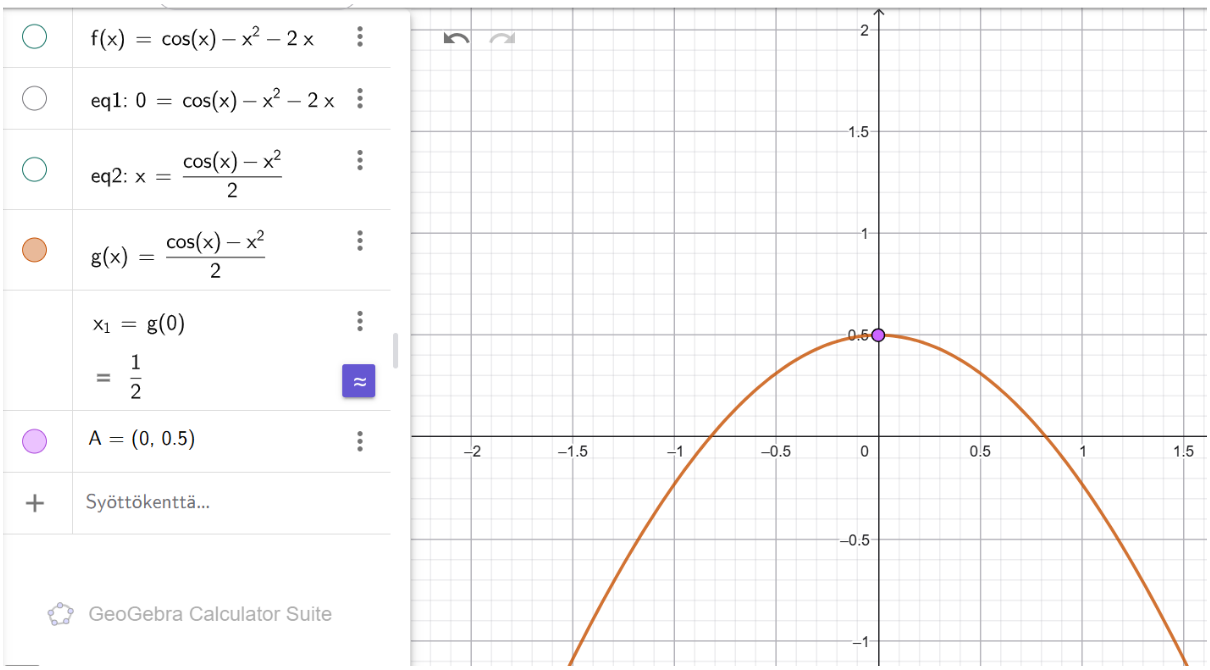
Kuvaselite: Kuvassa on edellinen funktio f(x) ja loivemman näköinen funktio g(x).

Loivempi ruskea on $g(x)$, jyrkempi vihreä on $f(x)$.

$$f(x) = cos(x) - x^2 - 2x$$

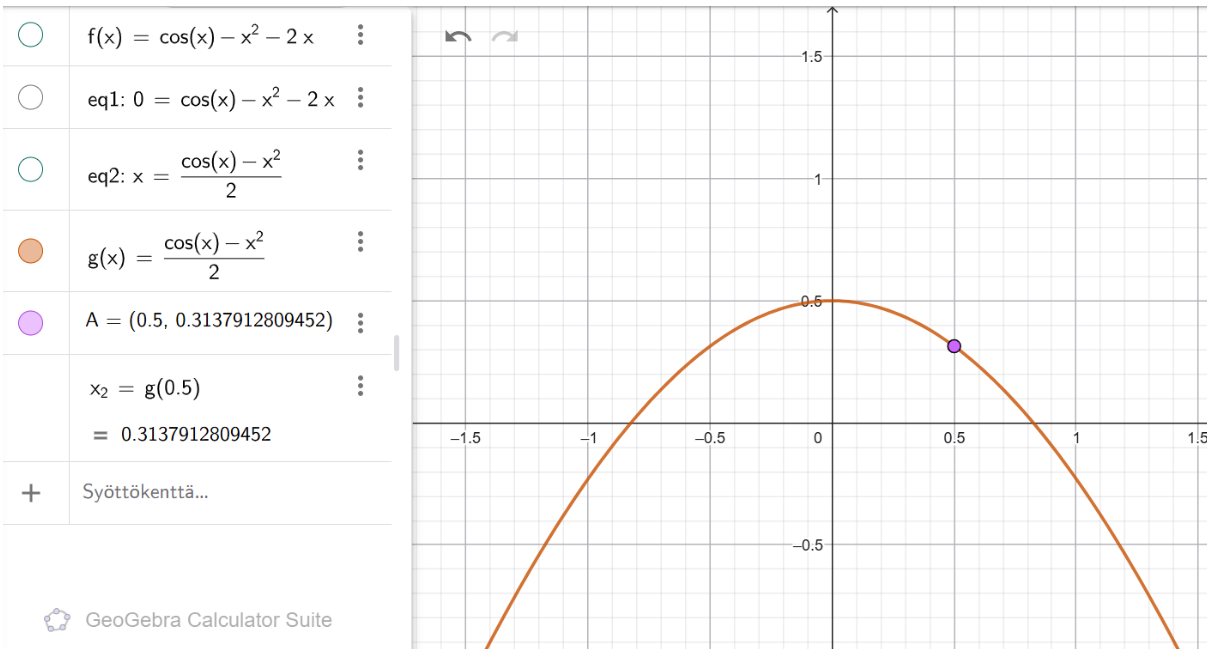
$$g(x) = \frac{cos(x) - x^2}{2}$$

2. Sijoitetaan ensin $x_0 = 0$



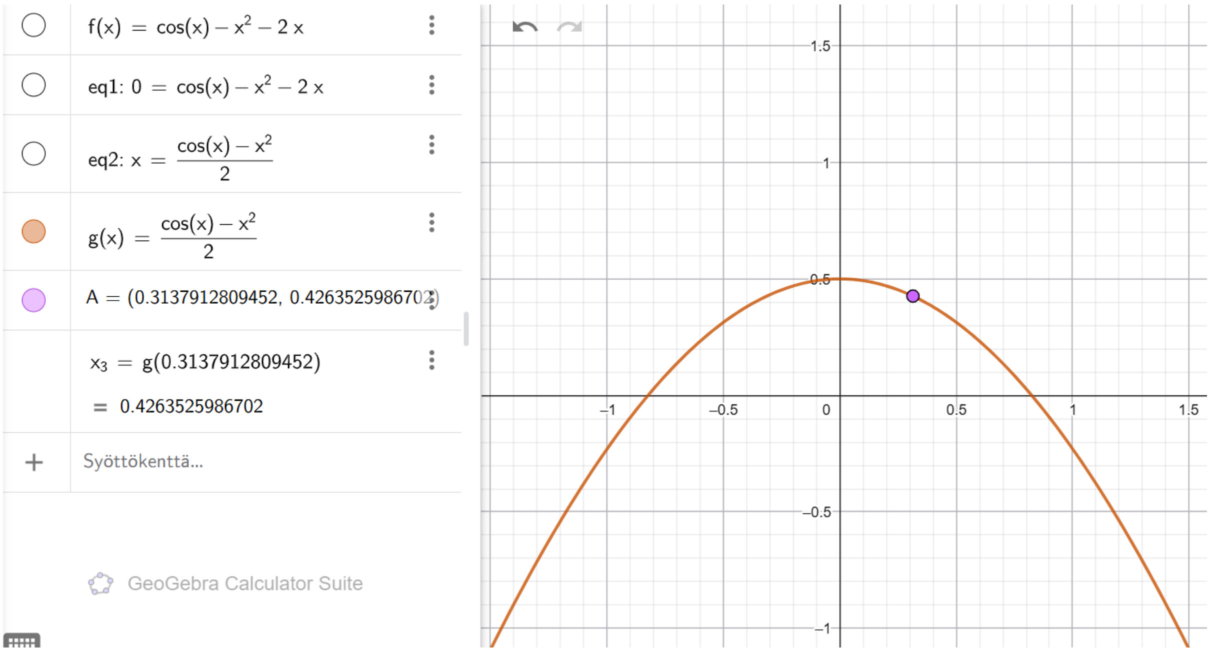
$x_1 = g(0) = 0.5$

3. $x_1 = 0.5$



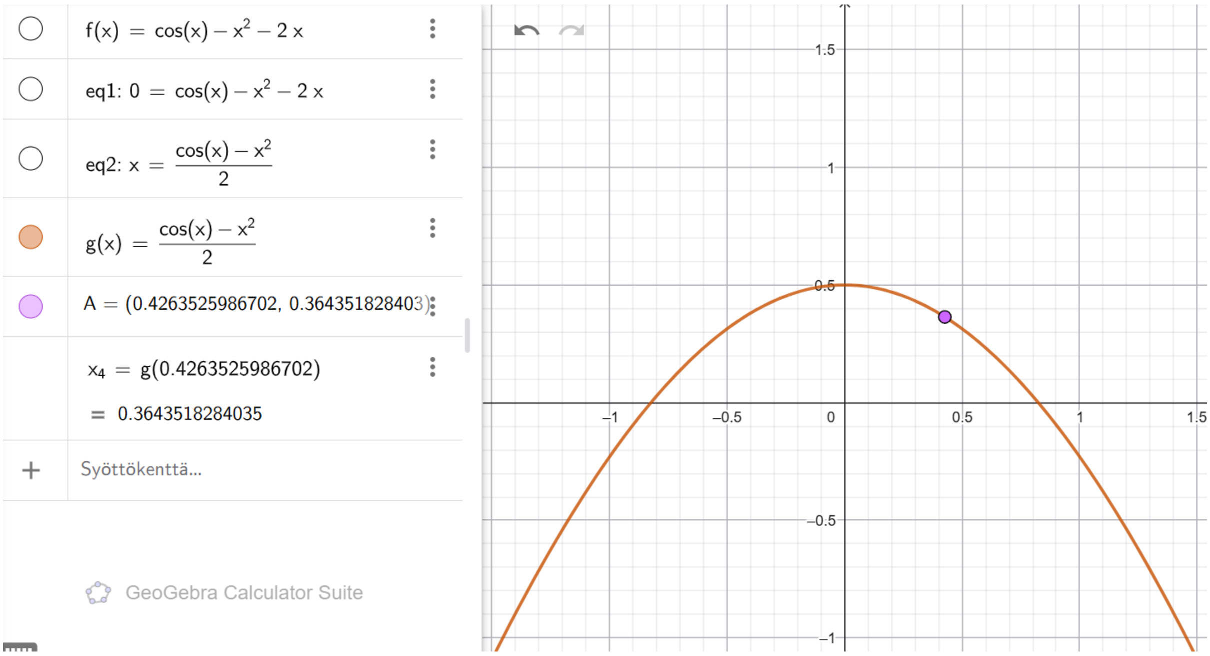
$x_2 = g(0.5) = 0.3137912809452$

4. $x_2 = 0.3137912809452$



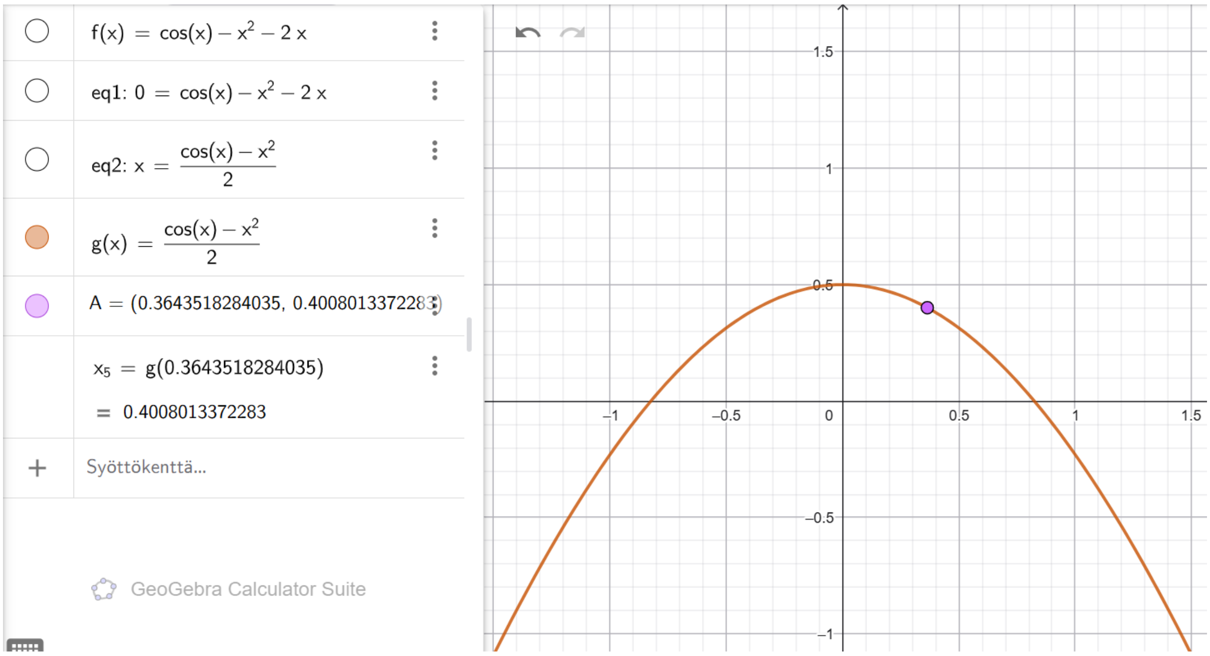
$x_3 = g\,(0.3137912809452)\ =\ 0.4263525986702$

5. $x_3 =\ 0.4263525986702$



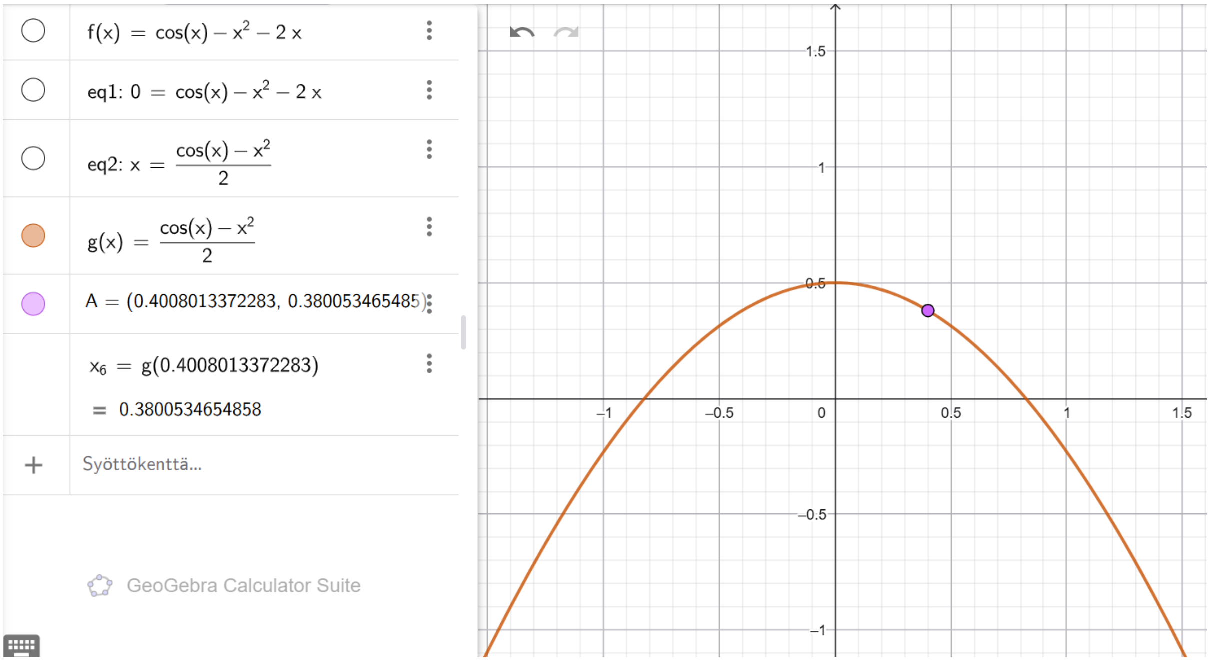
$x_4 =\ g\,(0.4263525986702)\ =\ 0.3643518284035$

6. $x_4 =\ 0.3643518284035$



$x_5 = g\ (0.3643518284035)\ = 0.4008013372283$

7. $x_5 = 0.4008013372283$



$x_6 = g\ (0.4008013372283)\ = 0.3800534654858$

Jatketaan taulukkolaskennalla laskemiseen.

Taulukkolaskennalla

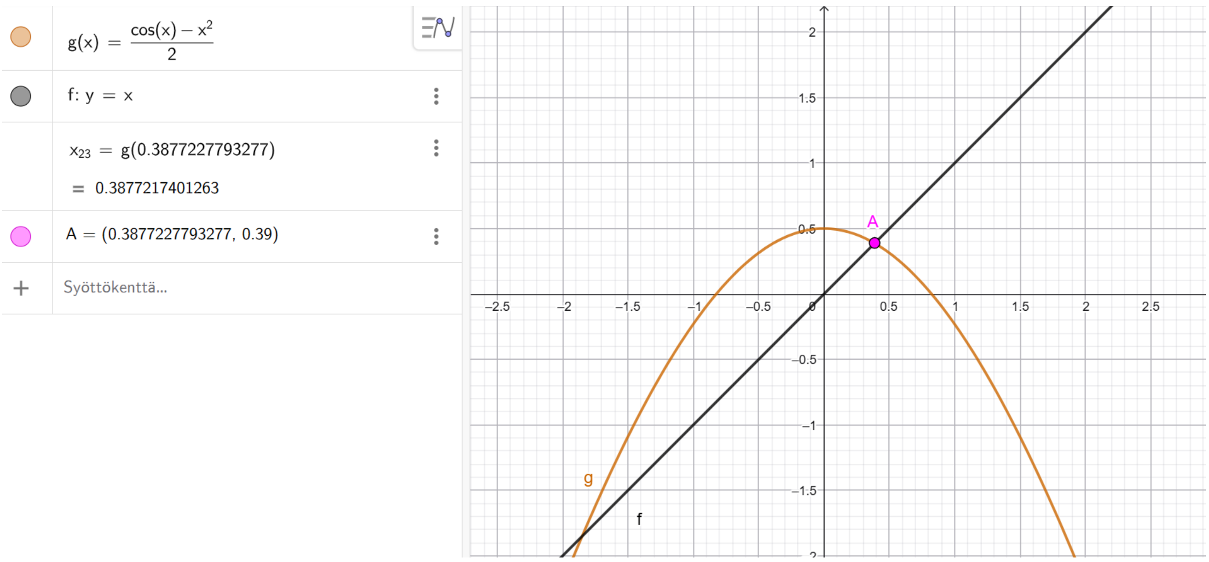
Soluun A1 asetetaan arvo 0. Soluun A2 kirjoitetaan =(COS(A2)-A2^2)/2. Tämän jälkeen A2-solun oikeasta alakulmasta vedetään alaspäin, jolloin saadaan:

Rivinumero	Laskun tulos	x_n
1	0	x_0
2	0,5000000000000	x_1
3	0,3137912809452	x_2
4	0,4263525986702	x_3
5	0,3643518284035	x_4
6	0,4008013372283	x_5
7	0,3800534654858	x_6
8	0,3921020830892	x_7
9	0,3851818928866	x_8
10	0,3891825075994	x_9
11	0,3868782638430	x_10
12	0,3882083040461	x_11
13	0,3874415348242	x_12
14	0,3878838938011	x_13
15	0,3876287962108	x_14
16	0,3877759396861	x_15
17	0,3876910771110	x_16
18	0,3877400240690	x_17
19	0,3877117937734	x_18
20	0,3877280761035	x_19
21	0,3877186851194	x_20
22	0,3877241015035	x_21
23	0,3877209775424	x_22
24	0,3877227793277	x_23
25	0,3877217401263	x_24
26	0,3877223394988	x_25
27	0,3877219938034	x_26

28	0,3877221931875	x_27
29	0,3877220781902	x_28
30	0,3877221445164	x_29

Huomataan, että rivien 24–25 tulokset eivät enää muuta rakennetta 0.38772, joten vastaus voidaan pyöristää muotoon $x \approx 0.3877$.

Tulos esitytettynä graafisesti kiintopisteen avulla:



Kuvaselite: Kuvassa on funktio g(x) ja y = x. Näiden käyrien leikkauspiste sekä g(x):n arvo ovat merkitty pisteellä A, joka sijaitsee kohdassa, jossa käyrät kohtaavat.

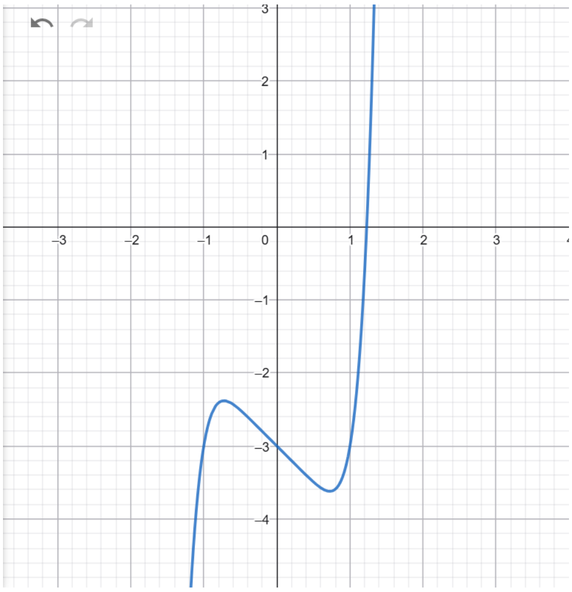
(Harsunkorpi ym., 2023, luku 15; Hähkiöniemi ym., 2021, luku 4.5)

Huomioita

Jos huomataan, ettei lähestytä mitään lukua, on aloitusväliä tarpeen pienentää tai kiintopisteen tapauksessa muokata funktiota. Ennen aloittamista onkin hyvä tarkastella funktiota kuvaajan avulla. Koska nollakohtia voi olla useampia, aloitusväli kannattaa rajata riittävän pieneksi, jotta menetelmä etenee kohti haluttua ratkaisua.

”Kiintopistemenetelmässä onnistuminen riippuu alkuarvon valinnasta ja iteroitavan funktion muutosnopeudesta kiintopisteen lähellä” (Harsunkorpi ym., 2023, s. 169).

Esimerkiksitapaus: Etsi kiintopistemenetelmällä yhtälön $x^7 - x - 3 = 0$ ainoan ratkaisun likiarvo kiintopistemenetelmällä.



Kuvaselite: Kuvan funktio on jyrkästi ylöspäin x-akselin kohdalla.

Kuvassa alkuperäinen funktio on hyvin jyrkkä nollakohdan lähellä.

Muokataan funktiota muotoon ja $x = g(x)$, joka on $g(x) = x^7 - 3$.

Kuvaselite: Kuvan funktio on jyrkästi ylöspäin x-akselin kohdalla.

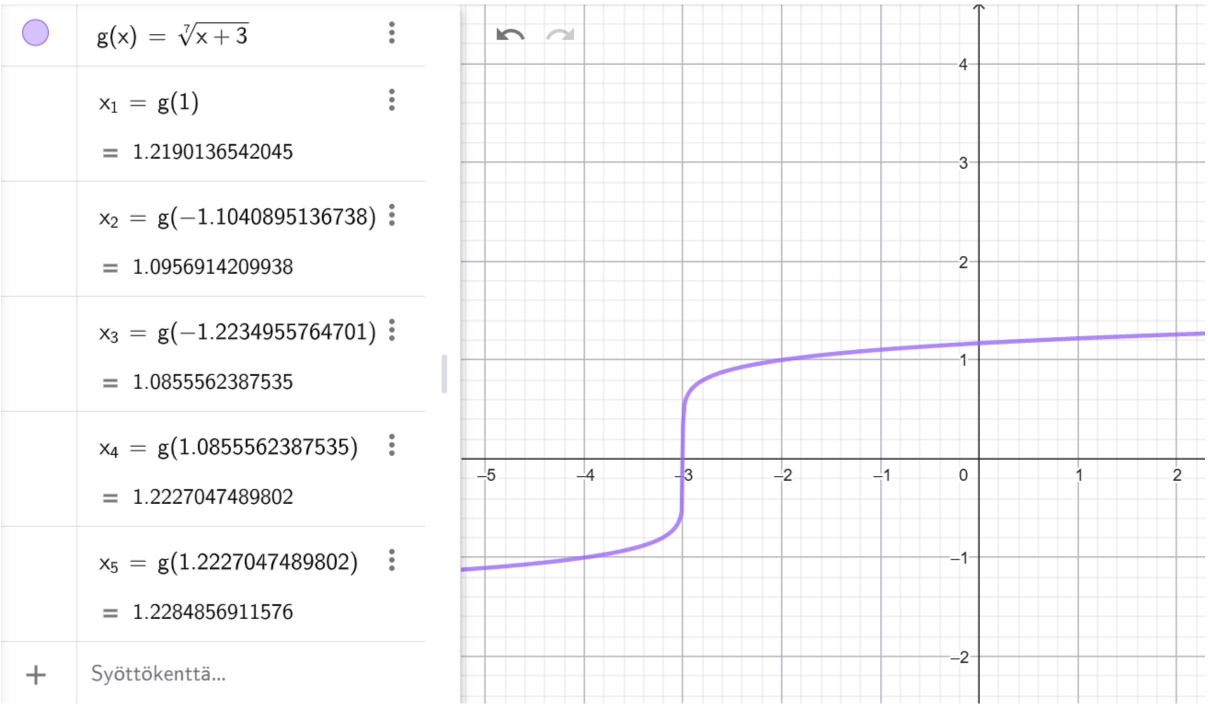
$x_1 = d(1) = -2$

$x_2 = d(-2) = -131$

$x_3 = d(-131) = -662062621900814$

Huomataan, että kiintopisteen kohdalla on liian jyrkkä, eikä tulokset lähene mitään tiettyä arvoa.

Muotoillaan sama funktio muotoon $g(x) = \sqrt[7]{x+3}$



Kuvaselite: Kuvan funktio on jyrkästi vaakasuuntaan y-akselin kohdalla.

$x_1 = g(1) = 1.2190136542045$

$x_2 = g(-1.1040895136738) = 1.0956914209938$

$x_3 = g(-1.2234955764701) = 1.0855562387535$

$x_5 = g(1.0855562387535) = 1.2227047489802$

$x_6 = g(1.2227047489802) = 1.2284856911576$

Tässä tapauksessa lähestytään jotain tiettyä pistettä eli nollakohtaa.

(Harsunkorpi ym., 2023, luku 15)

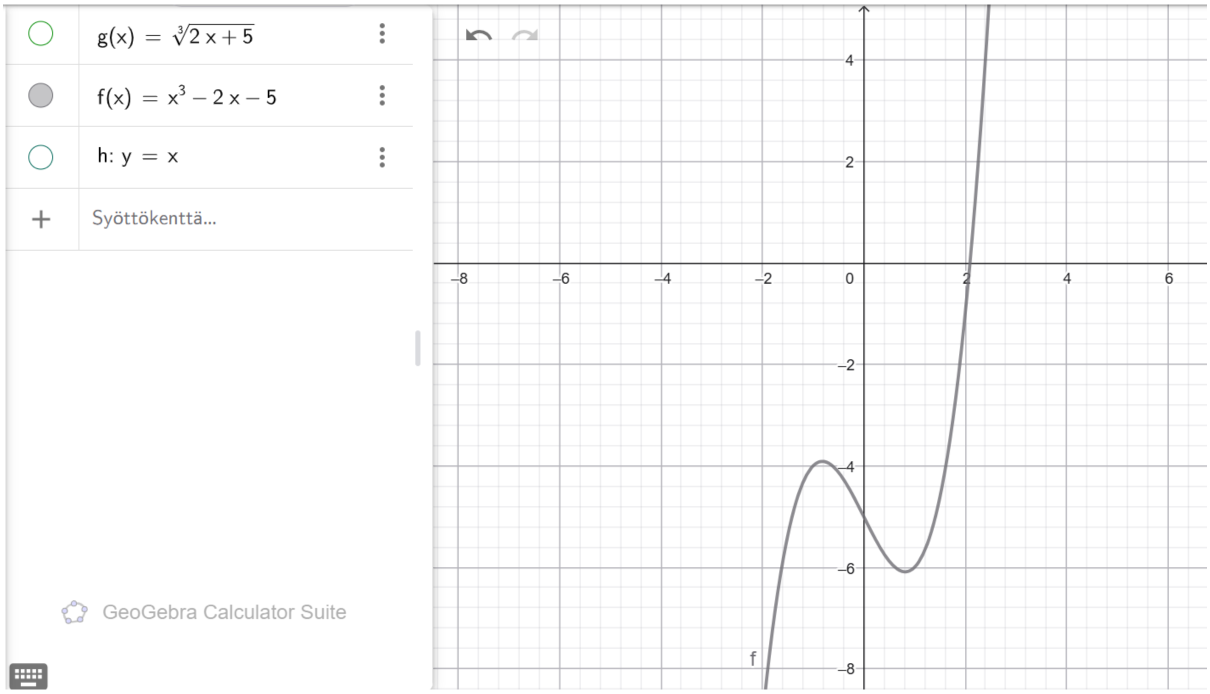
Tehtävä kiintopisteestä:

Etsi kiintopistemenetelmällä yhtälön $x^3 - 2x - 5 = 0$ ainoan ratkaisun kolmedesimaalinen likiarvo käyttämällä alkuarvoa $x_0 = 1$.

Vinkki: $g(x) = \frac{x^3-5}{2}$ ei tuota tulosta.

Ratkaisu: Muokataan yhtälöä muotoon $x = g(x)$, mikä olisi $g(x) = \sqrt[3]{2x+5}$.

Alkuperäinen funktio kuvaajalla:



Kuvaselite: Kuvan funktio on jyrkästi ylöspäin x-akselin kohdalla.

Aloitetaan sijoittamalla $x_0 = 1$

$x_1 = g(1) = 1.9129311827724$

$x_2 = g\ (1.9129311827724) = 2.0665807683968$
$x_3 = g\ (2.0665807683968) = 2.0902924231445$
$x_4 = g\ (2.0902924231445) = 2.0939040788519$
$x_5 = g\ (2.0939040788519) = 2.0944530982024$
$x_6 = g\ (2.0944530982024) = 2.0945365311936$
$x_7 = g\ (2.0945365311936) = 2.0945492096986$
$x_8 = g\ (2.0945492096986) = 2.094551136315$
$x_9 = g\ (2.094551136315) = 2.0945514290819$
$x_{10} = g\ (2.0945514290819) = 2.0945514735705$

Huomataan, että viimeiset neljä desimaalia 2.0945 pysyvät samoina, joten arvo voidaan pyöristää muotoon 2.095.

Vastaus: $x \approx 2.095$

Lähteet

Harsunkorpi, J., Heiskanen, P., Liekas, M., Saarelainen, M.-M., & Tahvainen, J. (2023). *Moodi: Algoritmit ja lukuteoriaa* (1.–2. painos). Sanoma Pro Oy.

Hähkiöniemi, M., Juhala, S., Juutinen, P., Laitinen, A., Luoma-aho, E., Raittila, T., & Tikka, T. (2021). *Juuri: Algoritmit ja lukuteoriaa* (1. painos). Kustannusosakeyhtiö Otava.

Kaw, A. (2023). *Bisection methods for solving a nonlinear equation*. Mathematics LibreTexts. https://math.libretexts.org/Workbench/Numerical_Methods_with_Applications_(Kaw)/3%3A_Nonlinear_Equations/3.03%3A_Bisection_Methods_for_Solving_a_Nonlinear_Equation

Ylioppilastutkintolautakunta. (n.d.). *Abitti – ohjelmoinnin muistilista*. Cheat Abitti. https://cheat.abitti.fi/build/index.html?lang=fi&tab=programming