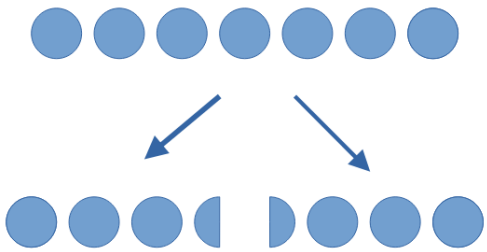
# Kongruenssi

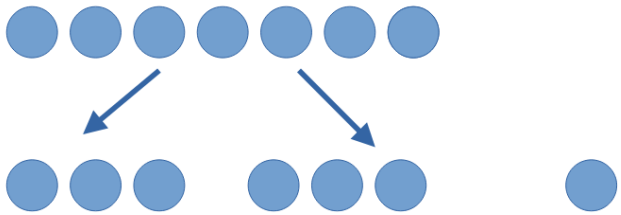
$\frac{7}{2} = 3.5$. Visuaalisesti esitettynä:



*Kuvaselitys: Kuvassa on seitsemän palloa, ja kaksi nuolta osoittaa niistä muodostettuihin kahteen eri ryhmään. Molemmissa ryhmissä pallot jakautuvat kolmeen kokonaiseen ja yhteen puolikkaaseen palloon.*

## Entäpä jos jaettaisiin vain kokonaislukuihin?

$\frac{7}{2}$ = 3 kokonaista ja 1 jää (jakojäännös)



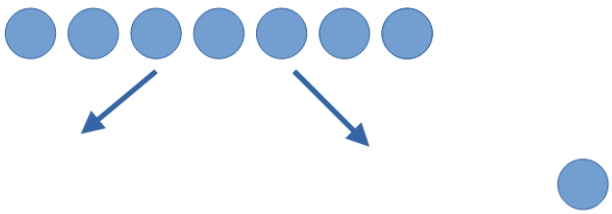
*Kuvaselitys: Kuvassa on seitsemän palloa, ja kaksi nuolta osoittaa niistä muodostettuihin kahteen eri ryhmään. Molemmissa ryhmissä pallot jakautuvat kolmeen kokonaiseen palloon. Ryhmien ulkopuolella on yksi yksittäinen pallo kuvastamassa jakojäännöstä.*

## Miten tämä voitaisiin merkitä kongruenssin avulla?

$\frac{7}{2}$ = 3 kokonaista ja 1 jää. Kongruenssissa tämä olisi:

$7 \equiv 1 \pmod 2$

Kongruenssissa ei tarvitse tietää, kuinka monta kokonaista lukua tulokseen sisältyy. Halutaan tietää vain mitä jaetaan, millä jaetaan ja mikä jää jakojäännökseksi. Kongruenssi visuaalisesti esitettynä:



*Kuvaselitys: Kuvassa on seitsemän palloa, ja kaksi nuolta osoittaa niistä muodostettuihin kahteen eri ryhmään. Ryhmiä ei ole piirretty näkyviin, mikä kuvastaa kongruenssimerkinnän tapaa jättää pois tieto siitä, kuinka monta täyttä ryhmää muodostuu. Ryhmien ulkopuolella on yksi yksittäinen pallo kuvastamassa jakojäännöstä.*

## Miten kongruenssi puretaan?

$7 \equiv 1 \pmod 2$

$7 - 1 = 6$

6 on jaollinen 2:lla

Lukujen kongruenssissa tarkoitetaan, että kaksi lukua antavat saman jakojäännöksen. Modulo n tarkoittaa, että luvuilla on sama jakojäännös luvulla n jaettaessa. Yllä oleva esimerkki luetaan 7 on kongruentti 1:sen kanssa. (Hähkiöniemi ym., 2021, s.66–69)

### Miksi käytetään ≡, eikä =?

= merkitsee numeraalista yhtäsuuruutta, missä arvot ovat merkin molemmin puolin yhtä suuria tietyssä tilanteessa tai tietyillä muuttujien arvoilla.

≡ merkitsee vahvempaa yhteyttä. Se ilmaisee numeerisen yhtäsuuruuden ja lausekkeiden identtisyyden. Lausekkeet voidaan korvata toisillaan kaikissa yhteyksissä, riippumatta muuttujien arvoista.

#### Esimerkiksi:

$x = 3$ on tosi vain silloin, kun x on 3.

$2 \cdot x \equiv x + x$ on tosi aina kaikilla mahdollisilla $x$:n arvoilla

(Lingabites, 2023)

### Mitä hyötyä?

Jaollisuutta ja jakojäännöksiä voidaan tutkia kongruenssien avulla. Niitä hyödynnetään käytännössä esimerkiksi salasanojen muodostuksessa. (Hähkiöniemi ym., 2021, luku 3)

## Sääntöjä

$a \equiv b \bmod (n),\ c \equiv b \bmod (n)$ ja $k \in Z_+$

1. Kongruenttien lukujen summat ovat kongruentteja $a + c \equiv b + d (\bmod n)$
2. Kongruenttien lukujen tulot ovat kongruentteja $a \cdot c \equiv b \cdot d (\bmod n)$
3. Kongruenttien lukujen potenssit $a^k \equiv b^k (\bmod n)$

### Todistaminen esimerkeillä:

1. $7 \equiv 1 (\bmod 2)$ ja $5 \equiv 1 (\bmod 2)$
   $7 + 5 = 1 + 1 (\bmod 2)$
   $12 = 2 (\bmod 2)$
   Tarkistetaan:

$12 - 2 = 10$
10 on jaollinen 2:lla

2. $7 \pmod 2 \equiv 1$ ja $5 \pmod 2 \equiv 1$

   $7 \cdot 5 = 1 \cdot 1 \pmod 2$

   $35 = 1 \pmod 2$

   Tarkistetaan:

   $35 - 1 = 34$

   34 on jaollinen 2:lla

3. $k = 3$ ja $7^3 \pmod 2 \equiv 1^3$

   $343 = 1 \pmod 2$

   Tarkistetaan:

   $343 - 1 = 342$

   342 on jaollinen 2:lla

(Harsunkorpi ym., 2023)

# Lähteet


Lingabites. *(2023). Mathematical symbols – equivalent sign.* https://lingabites.com/2023/12/22/mathematical-symbols-equivalent-sign

Harsunkorpi, J., Heiskanen, P., Liekas, M., Saarelainen, M.-M., & Tahvainen, J. (2023). *Moodi: Algoritmit ja lukuteoriaa* (1.–2. painos). Sanoma Pro Oy.

Hähkiöniemi, M., Juhala, S., Juutinen, P., Laitinen, A., Luoma-aho, E., Raittila, T., & Tikka, T. (2021). *Juuri: Algoritmit ja lukuteoriaa* (1. painos). Kustannusosakeyhtiö Otava.