

Yhtälön numeerinen ratkaiseminen

Kaikissa tapauksissa ei pystytä ratkaisemaan yhtälön tarkkoja arvoja. Näissä tapauksissa voidaan hyödyntää yhtälön ratkaisujen likiarvoja. Esiteltävät tavat ovat puolitusmenetelmä, newtonin menetelmä ja kiintopistemenetelmä.

Nollakohtien ratkaiseminen

Tehtävät voidaan toteuttaa taulukkolaskennan avulla, mutta esimerkit on tehty GeoGebralla havainnollistamisen takia. Kiintopistemenetelmässä on esitelty myös taulukkolaskennan avulla laskeminen. Jos kaksi likiarvoa lähestyy toisiaan, funktion nollakohta on siinä.

Pyöristäminen ja likiarvot

Lukuja ei kannata pyöristää liian aikaisin. Tehtävissä ilmoitetaan yleensä, millä tarkkuudella vastaus halutaan. Jos esimerkiksi pyydetään tarkkuutta neljään desimaaliin, on varmistettava, että vertailtavien lukujen viisi viimeistä desimaalia eivät enää muutu.

1. Puolitusmenetelmä (MAA6)

”Jos jatkuva funktio saa välin päätepisteissä erimerkkiset arvot, niin funktion kuvaaja leikkaa x-akselin tällä välillä ainakin kerran ja funktiolla on tällä välillä ainakin yksi nollakohta” (SanomaPro)

Eli välissä] a , b [on nollakohta, jos välin $[a, b]$ päätepisteet ovat erimerkkiset.

$[a, b]$ välin puolittamiseksi valitaan lopuksi uusi keskipiste c . Valitse se niin, että $a = a$ ja $b = c$. Jos molemmat ovat positiivisia tai negatiivisia vaihda $a = c$ ja $b = b$.

Keskipiste lasketaan kaavalla $c = \frac{a+b}{2}$

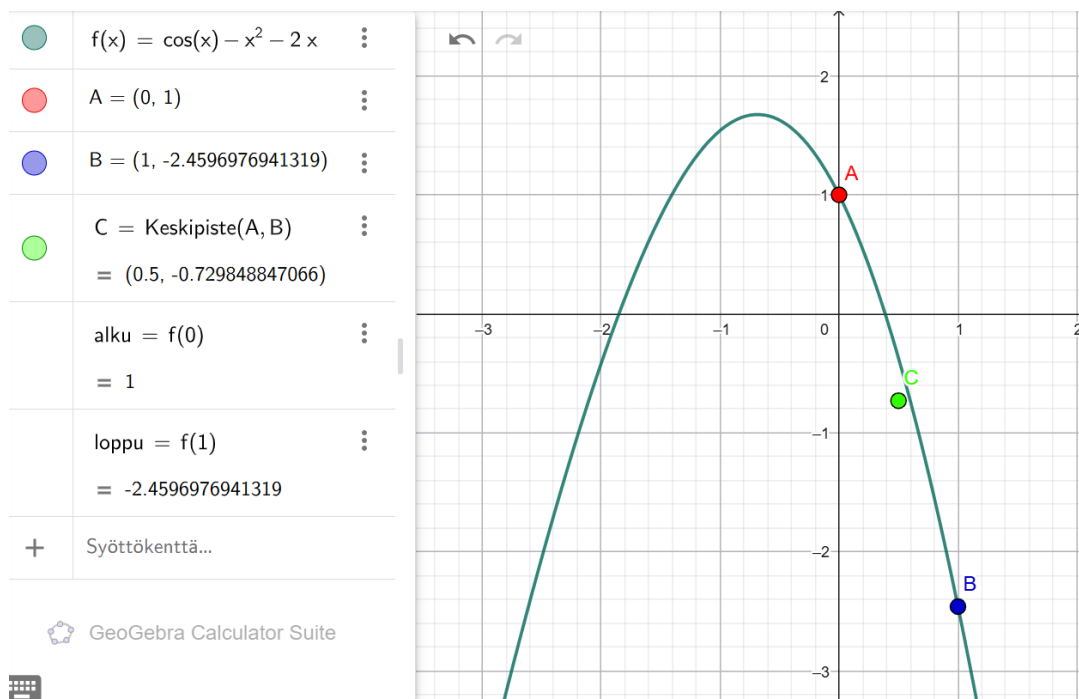
Nollakohtia etsitään x -akselilta, joten laskuissa käytetään x -arvoja. Y -arvoja puolestaan hyödynnetään tarkistamaan, ovatko funktion arvot eri merkkiset, sekä havainnollistamaan tilannetta graafisesti esimerkin avulla.

Ennen menetelmän soveltamista on varmistettava, että yhtälöllä $f(x) = 0$ on ratkaisu.

1. Ratkaistaan funktiota $f(x) = \cos(x) - x^2 - 2x$

Funktio on määriteltynä nimellä $f(x)$, johon sijoitetaan arvot. A kuvastaa tarkasteltavan välin alkupistettä, B välin loppupistettä ja C on näiden kahden pisteen keskiarvoa.

Valitaan väliksi $]0, 1[$, sillä funktio saa erimerkkiset arvot välin $[0, 1]$ päätepisteissä.



Kuvaselite: Kuvassa on alaspäin aukeavan paraabelin näköinen funktio. Kuvassa näkyvät visuaalisesti pisteet A, B ja C, mutta tehtävän ratkaisemisen kannalta olennaisimmat asiat löytyvät tekstimuodossa.

funktio $f(x) = \cos(x) - x^2 - 2x$, johon sijoitettiin 0 ja 1:

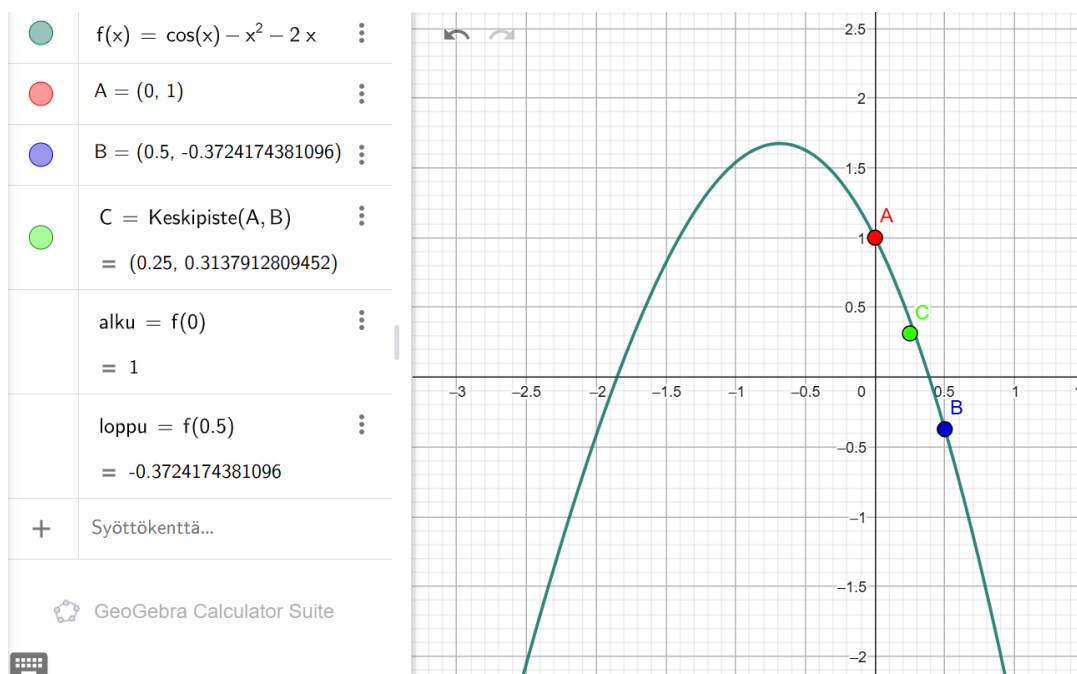
alku: $f(0) = 1$

loppu: $f(1) = -2.4596976941319$

Huomataan, että tulokset ovat erimerkkisiä (- ja +), joten lasketaan 0 ja 1 avulla keskiarvo:

keskipiste: $x = \frac{0+1}{2} = 0.5$

2. Valitaan tarkasteluvälin keskipiste uudeksi päätepisteeksi eli 0.5. (Koska 1 ja 0 keskiarvo on 0.5). Tarkistetaan saako funktio erimerkkiset tulokset välin päätepisteissä $[0, 0.5]$ ja valitaan sitten uusi keskipiste. Tätä vaihetta toistetaan, kunnes löydetään tarpeeksi samanlaiset likiarvot.

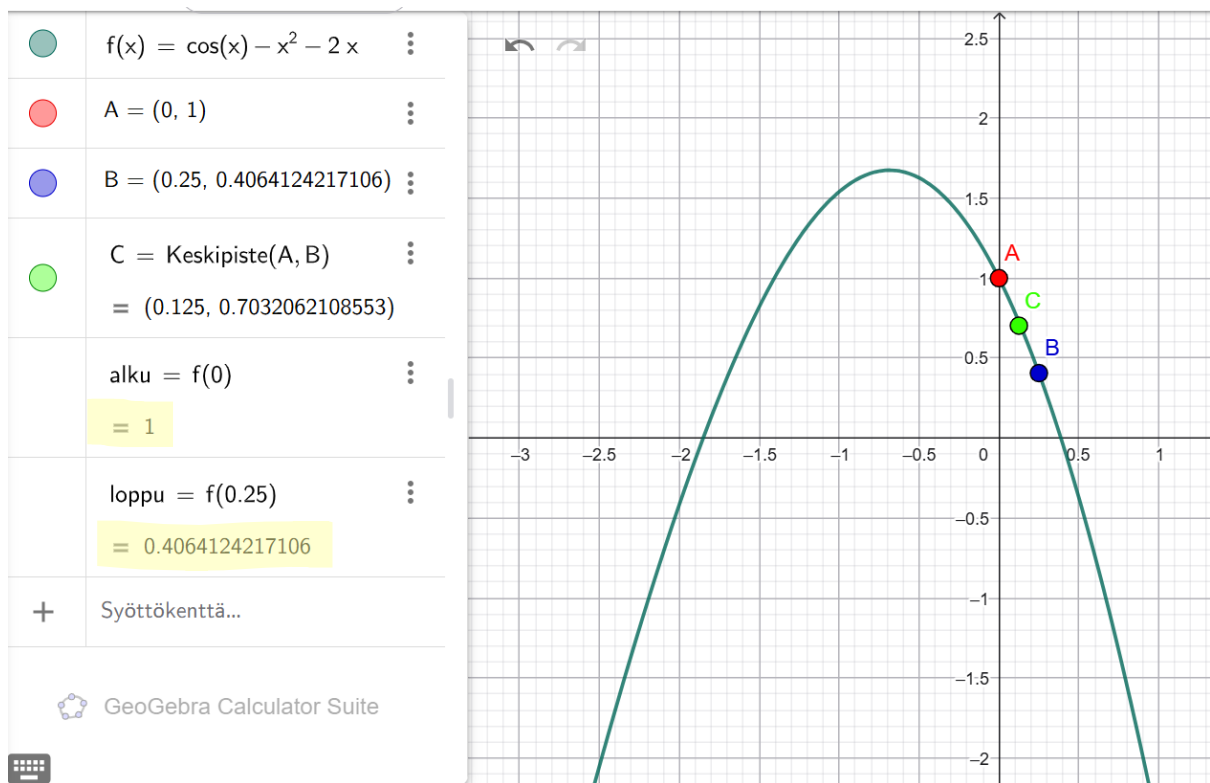


alku: $f(0) = 1$

loppu: $f(0.5) = -0.3724174381096$

keskipiste = $\frac{0+0.5}{2} = 0.25$

3. Valitaan uudeksi päätepisteeksi 0.25. Tarkastellaan väliä $[0, 0.25]$

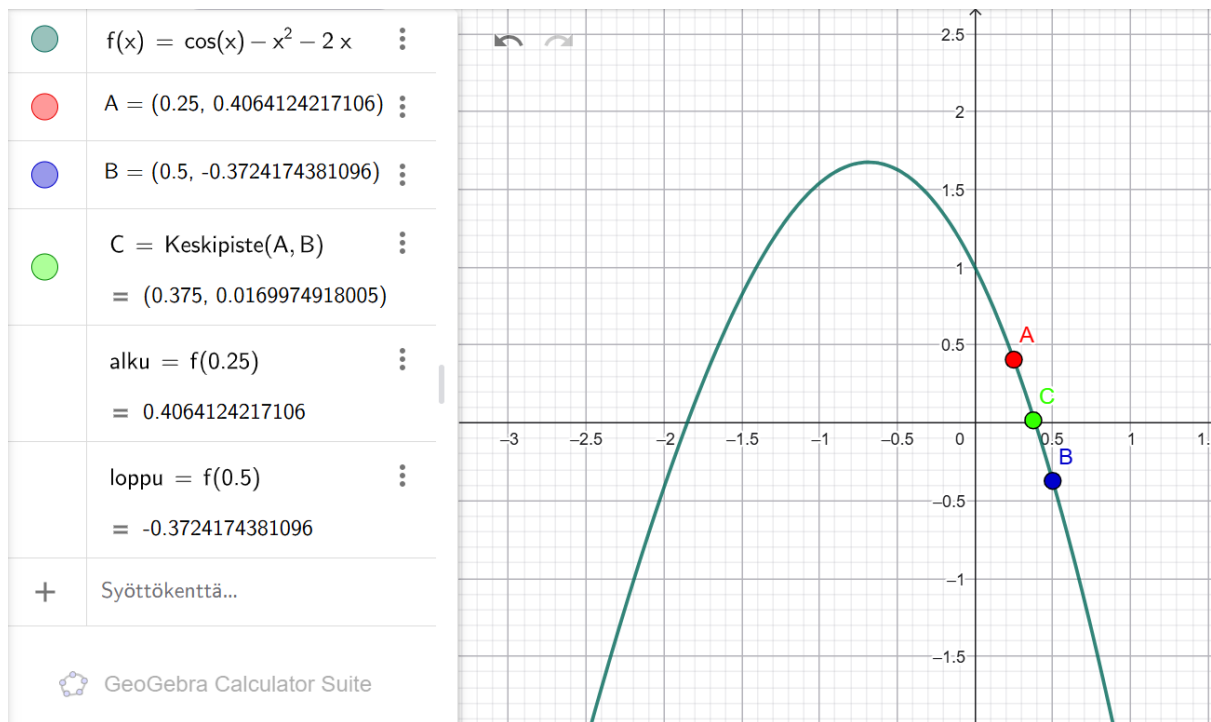


alku: $f(0) = 1$

loppu: $f(0.25) = 0.4064124217106$

Päädymme tilanteeseen, että molemmat tulokset ovat positiivisia. Vaihdetaan $a = c$,
ja $b = b$

eli $[0.25, 0.5]$

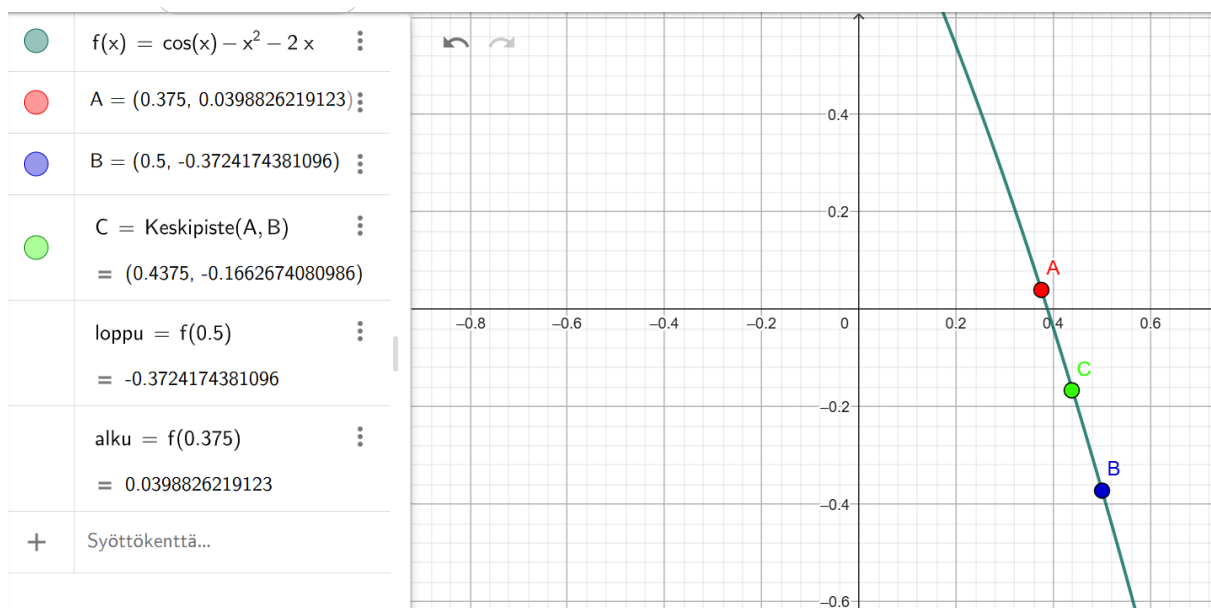


alku: $f(0.25) = 0.4064124217106$

loppu: $f(0.5) = -0.3724174381096$

keskipiste $= \frac{0.25+0.5}{2} = 0.375$

4. $[0.25, 0.375]$ päädytään taas, että on molemmat positiivisia, joten vaihdetaan $[0.375, 0.5]$

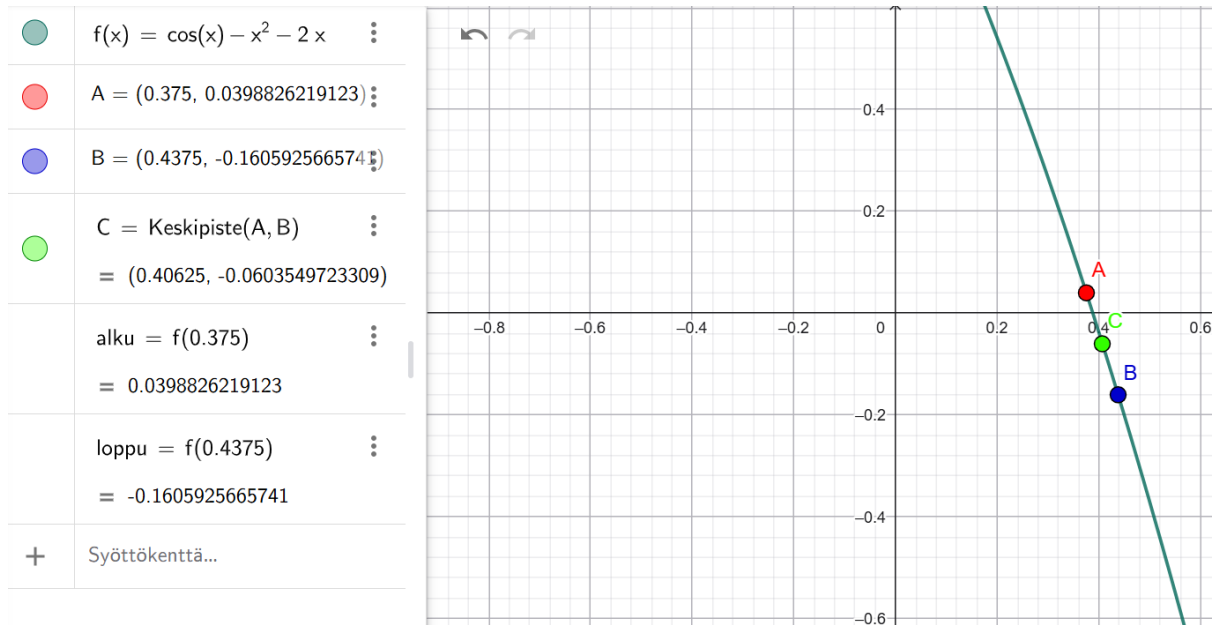


alku: $f(0.375) = 0.0398826219123$

loppu: $f(0.5) = -0.3724174381096$

keskipiste = 0.4375

5. $[0.375, 0.4375]$

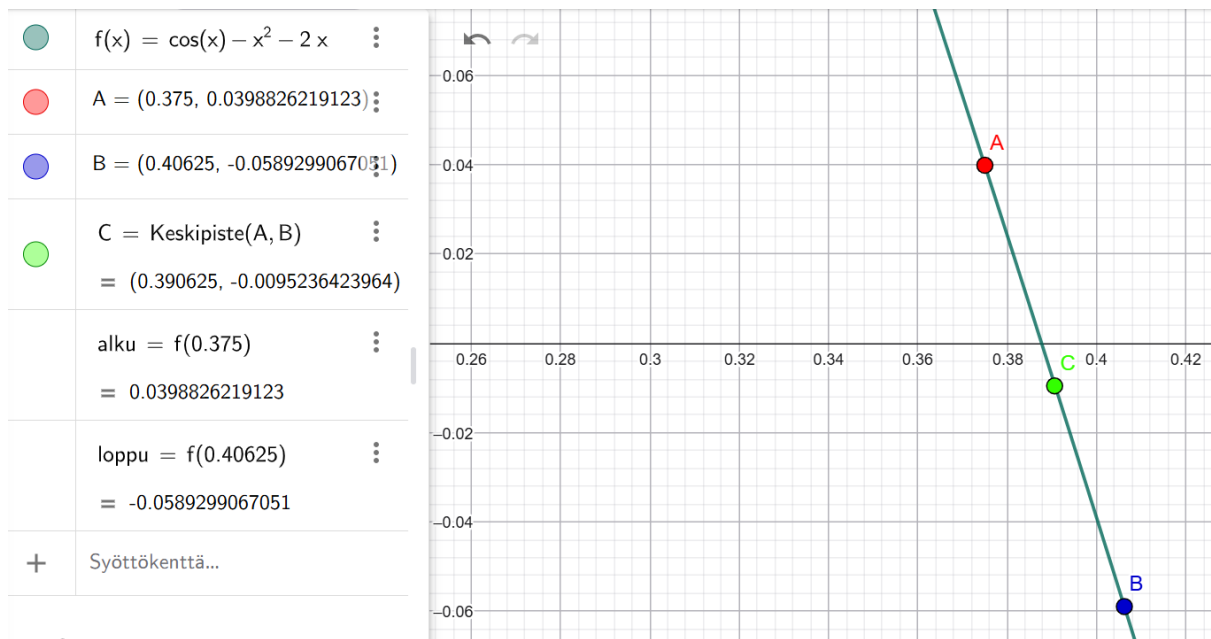


alku: $f(0.375) = 0.0398826219123$

loppu: $f(0.4375) = -0.1605925665741$

keskipiste = 0.40625

6. $[0.375, 0.40625]$

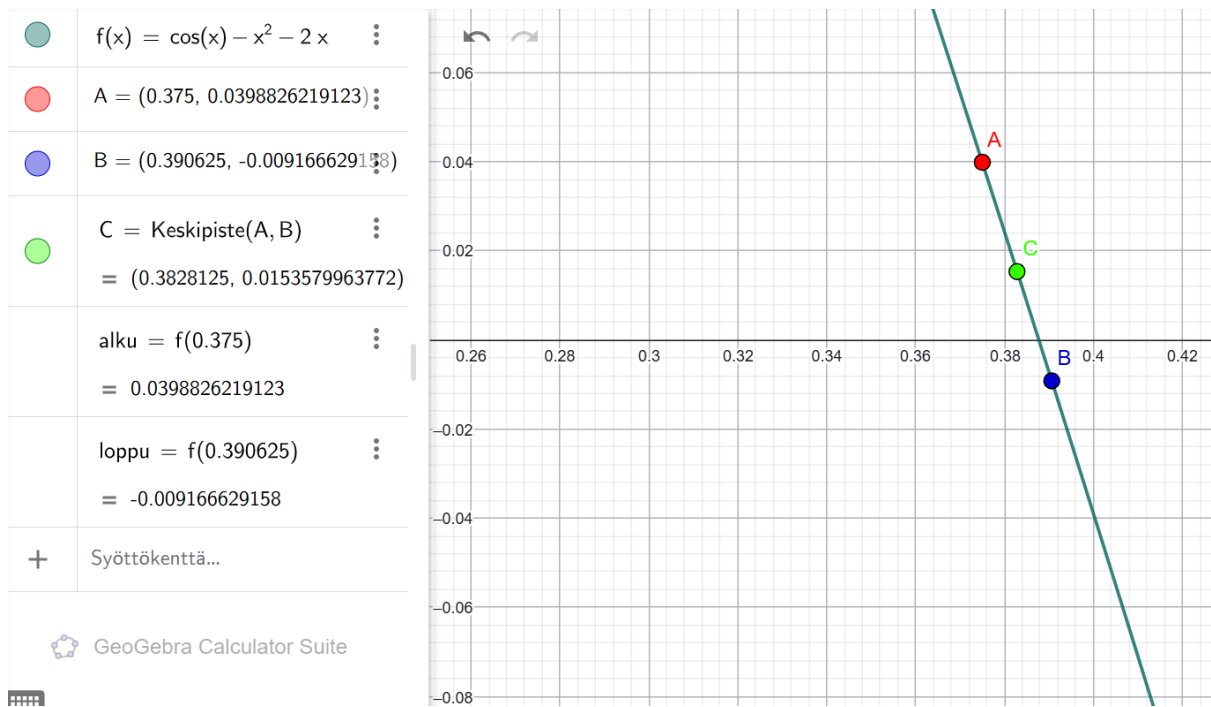


alku: $f(0.375) = 0.0398826219123$

loppu: $f(0.40625) = -0.0589299067051$

keskipiste = 0.390625

7. $[0.375, 0.390625]$

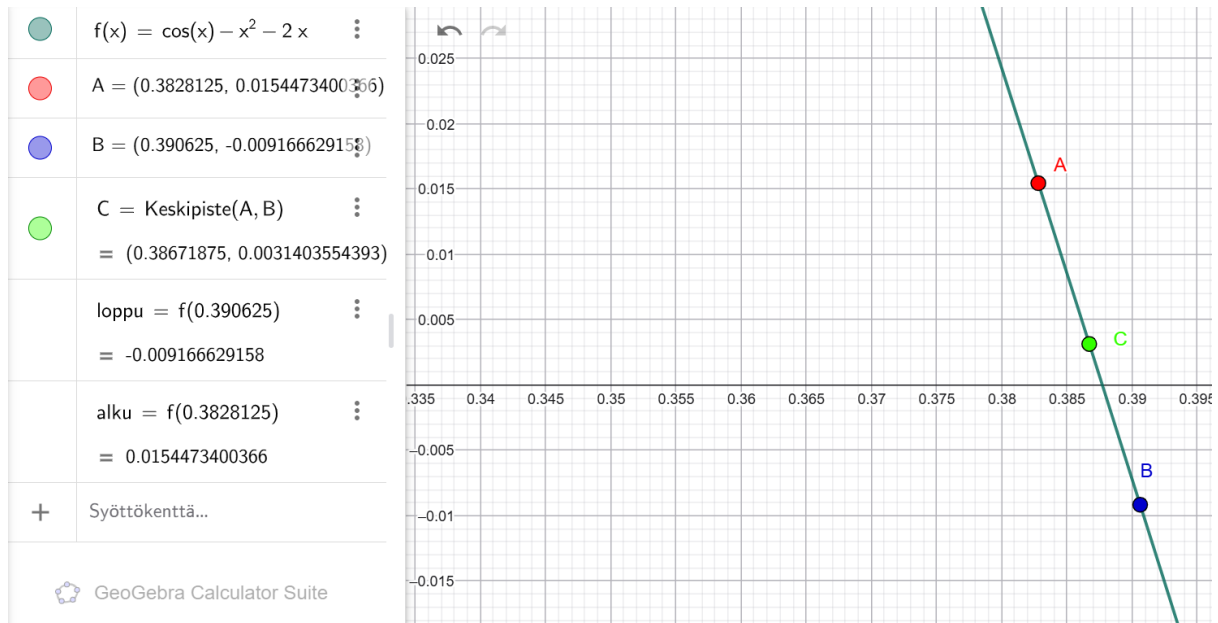


alku: $f(0.375) = 0.0398826219123$

loppu: $f(0.390625) = -0.009166629158$

keskipiste = 0.3828125

8. Molemmat tulokset olivat positiivisia ja vaihdetaan väliksi $[0.3828125, 0.390625]$

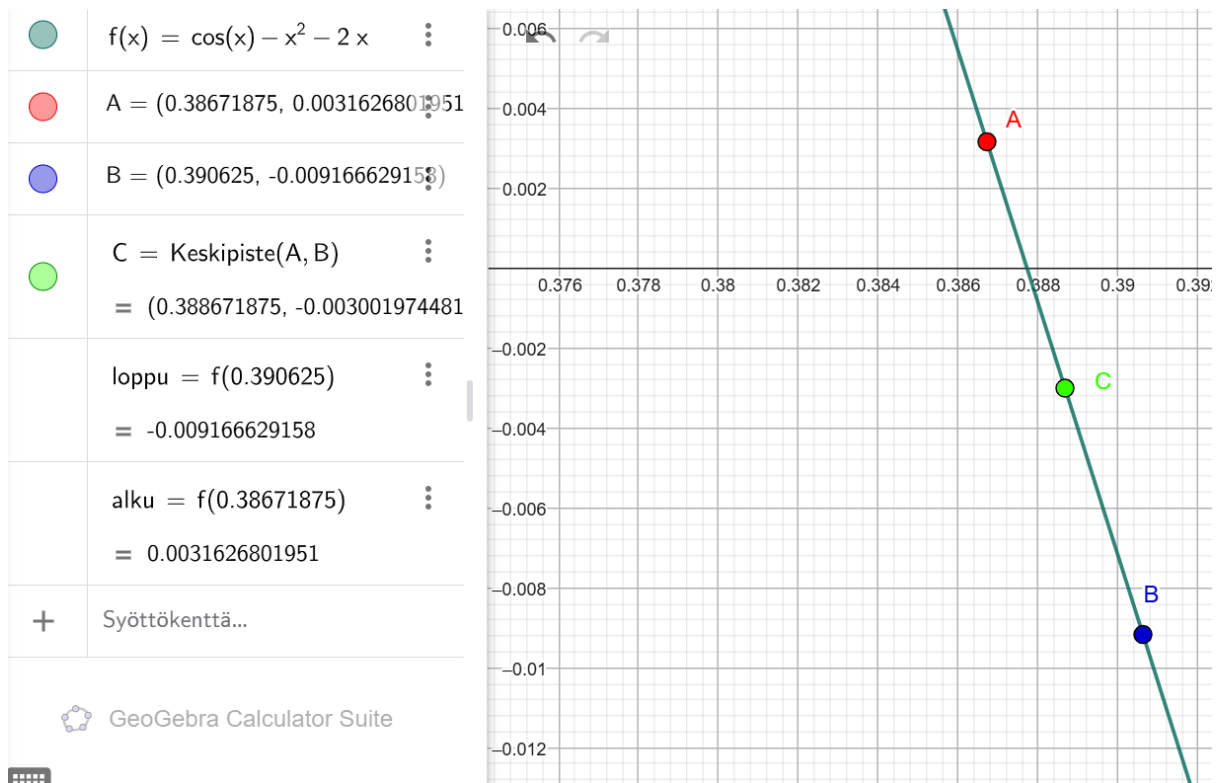


alku: $f(0.3828125) = 0.0154473400366$

loppu: $f(0.390625) = -0.009166629158$

keskipiste = 0.38671875

9. Molemmat tulokset olivat positiivisia ja vaihdetaan väliksi $[0.38671875, 0.390625]$.

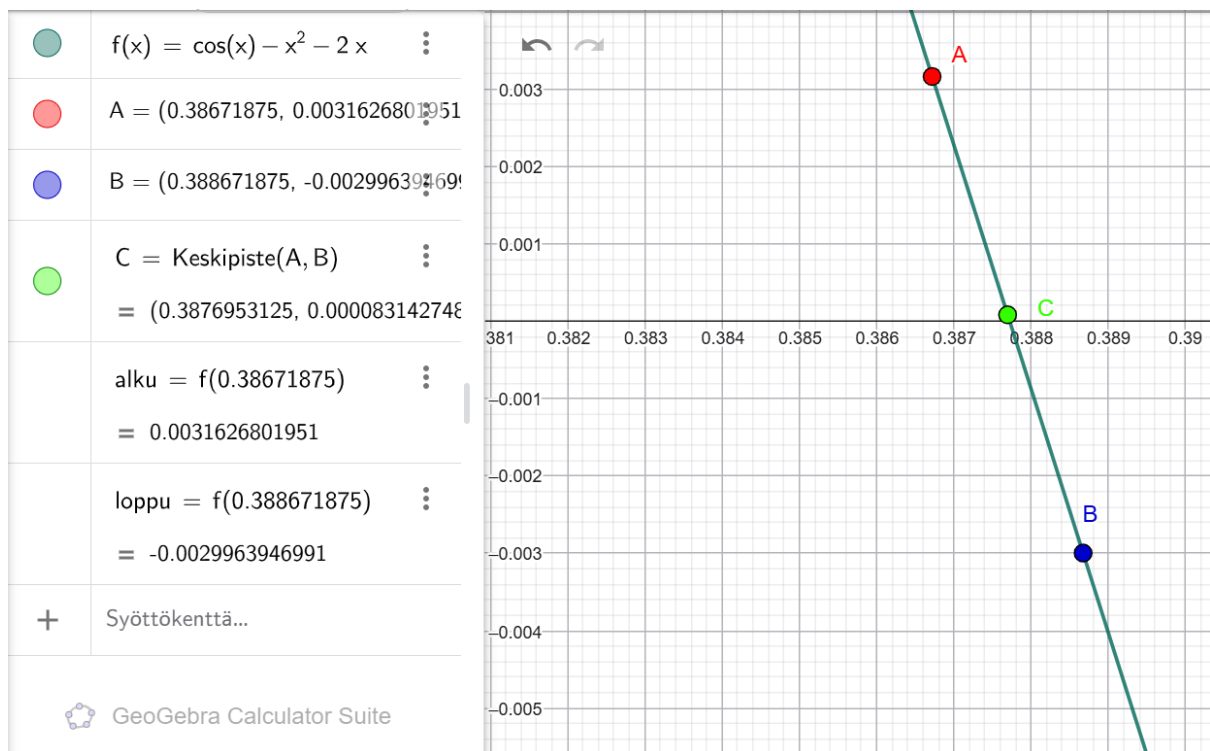


alku: $f(0.38671875) = 0.0031626801951$

loppu: $f(0.390625) = -0.009166629158$

keskipiste = 0.388671875

10. $[0.38671875, 0.388671875]$

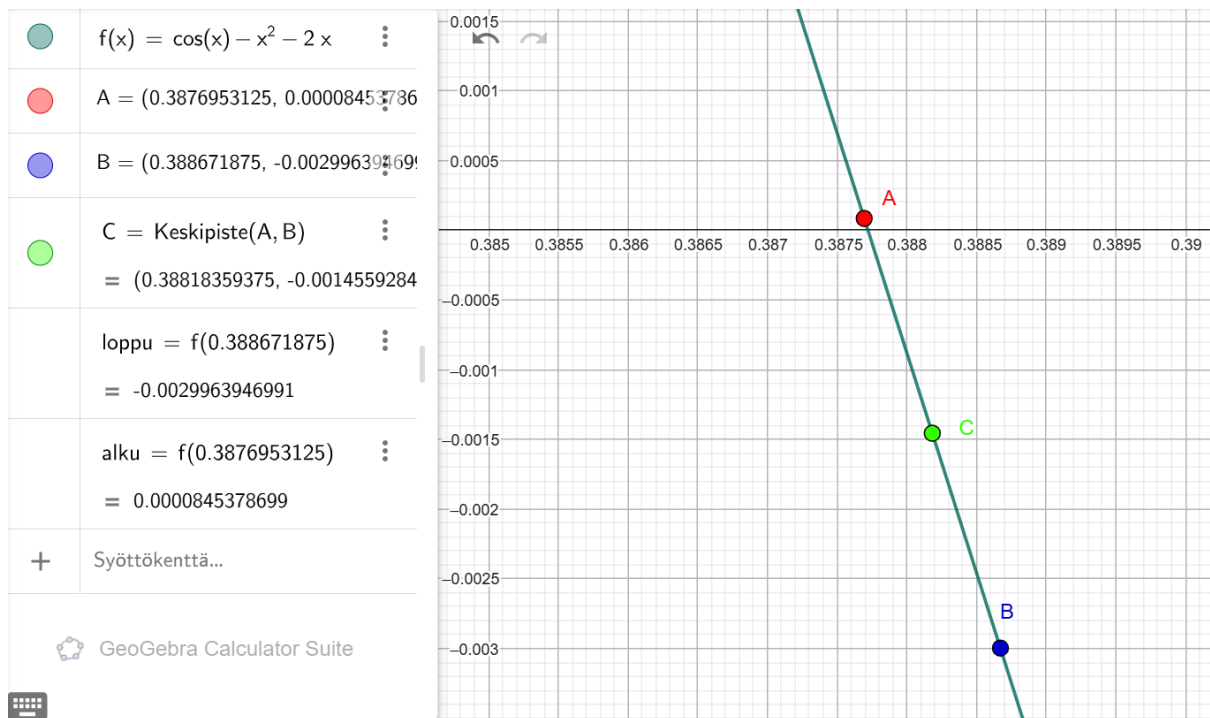


alku: $f(0.38671875) = 0.0031626801951$

loppu: $f(0.388671875) = -0.0029963946991$

keskipiste = 0.3876953125

11. Molemmat tulokset olivat positiivisia ja vaihdetaan väliksi $[0.3876953125, 0.388671875]$.



alku: $f(0.3876953125) = 0.00008453786999$

loppu: $f(0.388671875) = -0.0029963946991$

keskipiste = 0.38818359375

Tarkemman tuloksen saamiseksi laskua voisi jatkaa pidemmälle, mutta menetelmä on hitaampi kuin monet muut tavat. Puolitusmenetelmää on myös hankala toteuttaa taulukkolaskennassa, koska menetelmä edellyttää ehdon, jonka mukaan välin alku- ja loppupisteiden funktionarvojen täytyy olla erimerkkisiä.

Pyöristetään välin päätepisteet $[0.3876953125, 0.388671875] \approx 0.4$.

Puolitusmenetelmässä jatketaan niin kauan, kunnes päätepisteiden arvot ovat halutulla tarkkuudella yhtä suuret.

Newtonin menetelmä (MAA6)

Havainnollistava materiaali [Newtonin menetelmä – GeoGebra](#)

Cheat abitin mukaan:

Algoritmeja yhtälöiden ratkaisuun

Oletetaan, että f on derivoituva funktio, joka on määritelty välillä $[a, b]$ ja sen arvojoukko koostuu reaaliluvuista.

Newtonin menetelmällä nollakohta löydetään seuraavasti. Oletetaan, että tiedossa oleva likiarvo on x_n . Siitä saadaan parempi likiarvo x_{n+1} alla seuraavan kaavan mukaisesti:

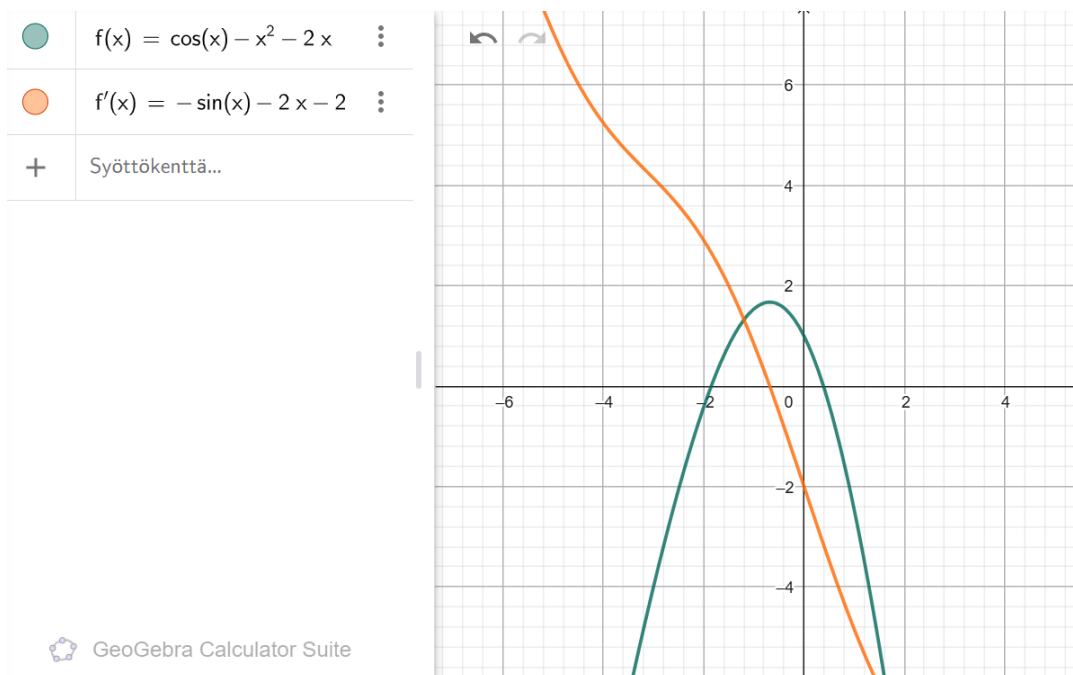
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Ajatuksena on funktion kuvaajan korvaaminen tangentilla. Piirretään tangentti kohtaan x_0, x_1, x_2 jne. Tässä esimerkissä Newtonin menetelmää ei ole visualisoitu tangentin avulla, vaan nollakohdan likiarvo on saatu suoraan sijoittamalla arvoja Newtonin kaavaan.

Newtonin menetelmässä valitaan alkuarvo x :lle, jonka jälkeen lasketaan Newtonin kaavalla uusi arvo. Tämä arvo syötetään uudestaan Newtonin kaavaan ja toistetaan kunnes likiarvot ovat riittävän samanlaiset.

Ennen menetelmän soveltamista on varmistettava, että yhtälöllä $f(x) = 0$ on ratkaisu.

Käytetään samaa funktiota:



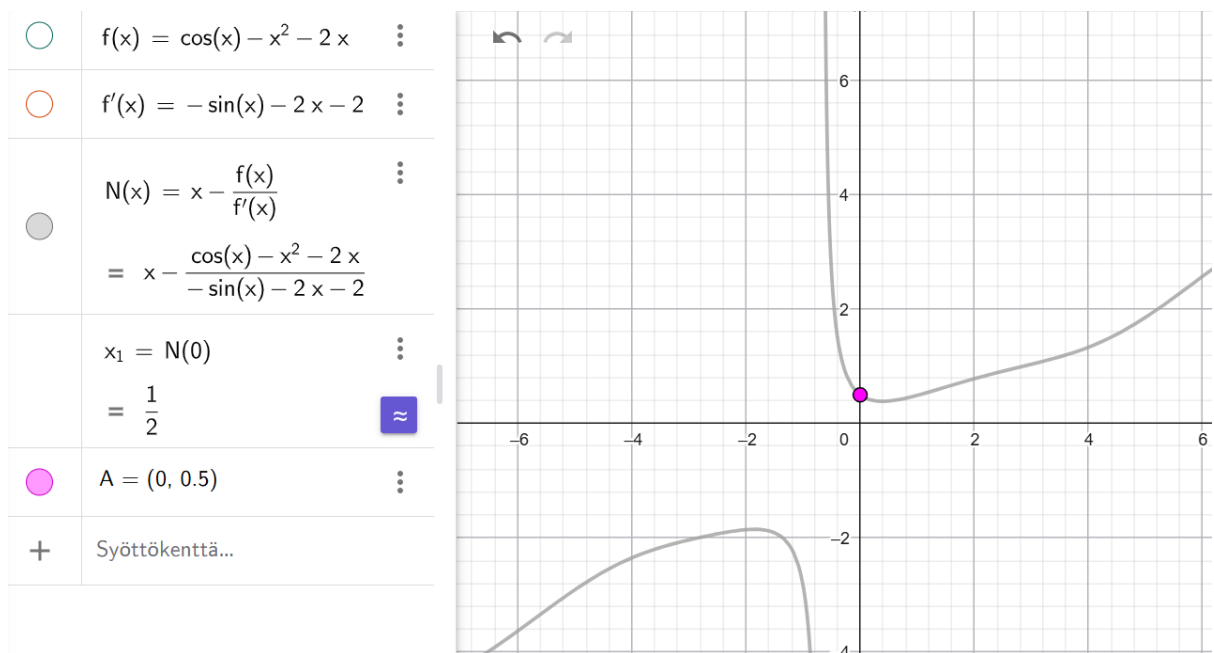
Kuvaselite: Kuvassa on edellinen funktio $f(x)$ ja nyt sen derivaatta, jonka käyrä muistuttaa suoraa, mutta siinä on lievää kaarevuutta.

Vihreä on sama funktio, oranssi on derivaatta

$$f(x) = \cos(x) - x^2 - 2x$$

$$f'(x) = -\sin(x) - 2x - 2$$

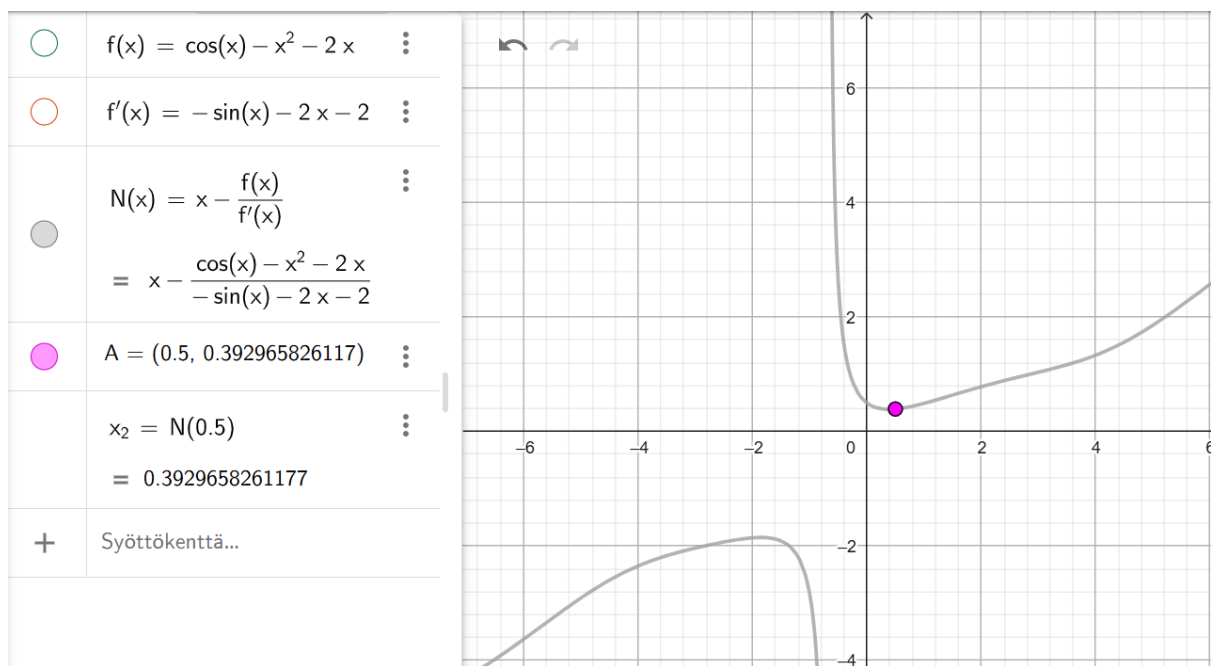
1. Aloitetaan sijoittamalla $x_0=0$ Newtonin lausekkeeseen



Kuvaselite: Kuvassa on edelliset funktiot sijoitettuna newtonin kaavaan. Kuvassa on kaksi käyrää, jossa Piste A osuu niistä ylempään.

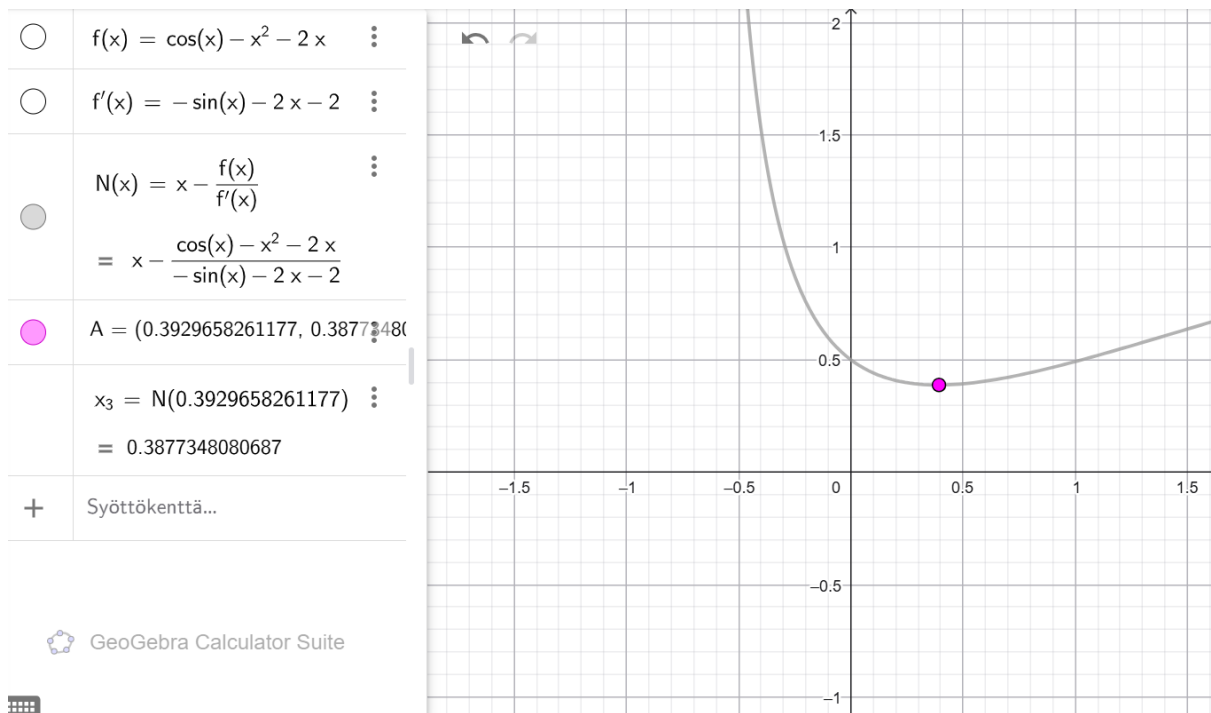
$N(x)$ on Newtonin menetelmä eli $N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, johon sijoitetaan $f(x)$ ja $f'(x)$, minkä lopputuloksena on $N(x) = x - \frac{\cos(x) - x^2 - 2x}{-\sin(x) - 2x - 2}$. Tähän sijoitetaan ensimmäiseksi arvoksi $x_0 = 0$, minkä tuloksena on 0.5. Piste A kuvaa Newtonin menetelmässä sijoitettavaa x -arvoa sekä sen funktion arvoa koordinaattipisteinä.

2. Syötetään arvo $x_1 = 0.5$ Newtonin lausekkeeseen



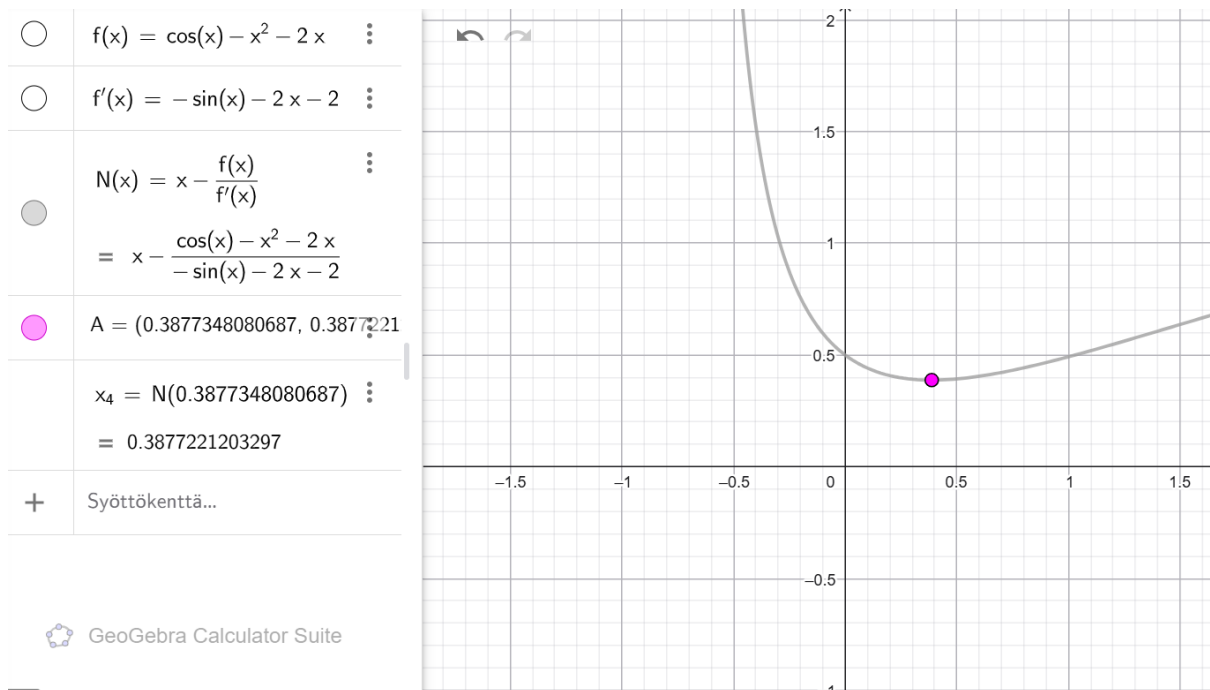
Toinen Newton-arvo on $x_2 = 0.3929658261177$. Tämä saatiin sijoittamalla
 alkuarvosta laskettu tulos $x_1 = 0.5$ Newtonin funktioon. Piste A = (0.5,
 0.3929658261177) esittää tätä sijoitusta koordinaattipisteinä (x_1, x_2)

3. $x_2 = 0.3929658261177$



$x_3 = N(0.3929658261177) = 0.3877348080687$

4. $x_3 = 0.3877348080687$



$x_4 = N(0.3877348080687) = 0.3877221203297$

Arvot ovat jo nyt lähellä toisiaan ja pyöristetään viimeisimmiksi tuloksena tulleet likiarvot $(0.3877348080687 \text{ ja } 0.3877221203297) \approx 0.39$

Kiintopistemenetelmä

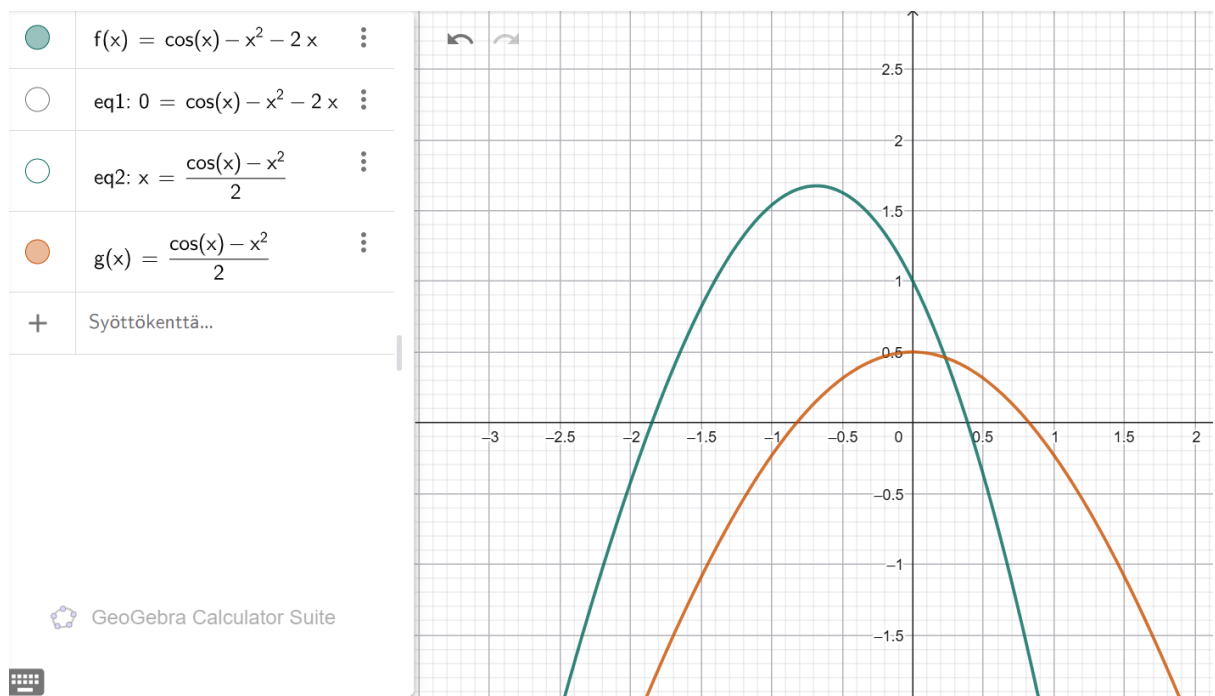
Havainnollistava materiaali: [Kiintopistemenetelmä ja sen graafinen havainnollistus – GeoGebra](#)

Kiintopiste eli ratkaisu on kuvaajan $y = g(x)$ ja suoran $y = x$ leikkauspisteen koordinaatti. Kiintopistettä voidaan käyttää muuhunkin kuin nollakohtien ratkaisemiseen.

Funktiota pitää muokata muotoon $x = g(x)$ ja $y = x$. Valitaan alkuarvo x , joka sijoitetaan funktioon $g(x)$. Saatua tulosta syötetään uudestaan $g(x)$:ään ja toistetaan kunnes likiarvot ovat riittävän samanlaiset.

Ennen menetelmän soveltamista on varmistettava, että yhtälöllä $g(x) = x$ on ratkaisu.

1. Yhtälön pitää olla muodossa $x = g(x)$ eli muokataan funktiota siihen muotoon. eq1 ja eq2 kuvastavat välivaiheita.



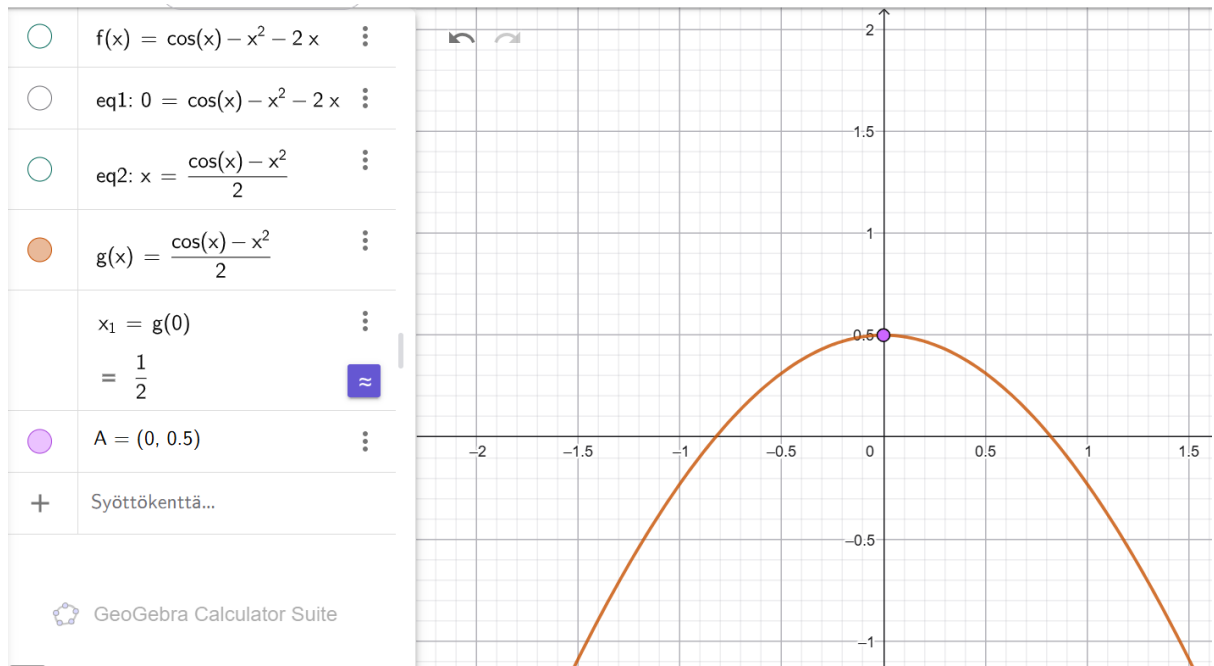
Kuvaselite: Kuvassa on edellinen funktio $f(x)$ ja loivemman näköinen funktio $g(x)$

Loivempi ruskea on $g(x)$, jyrkempi vihreä on $f(x)$.

$$f(x) = \cos(x) - x^2 - 2x$$

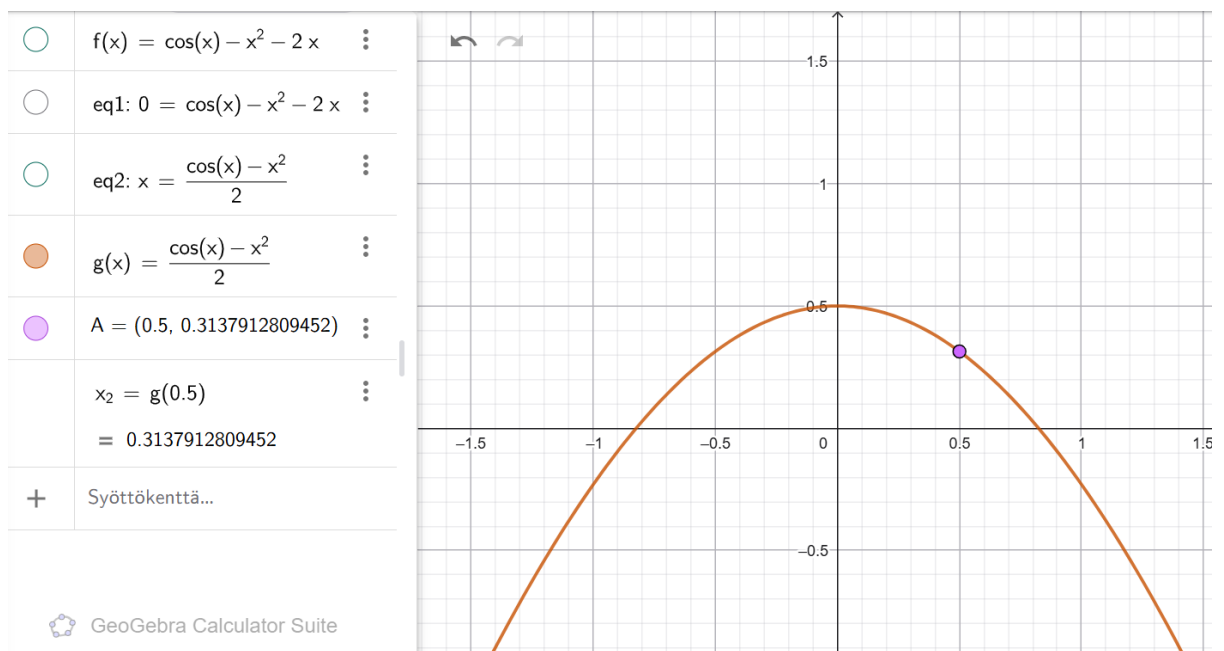
$$g(x) = \frac{\cos(x) - x^2}{2}$$

2. Sijoitetaan ensin $x_0 = 0$



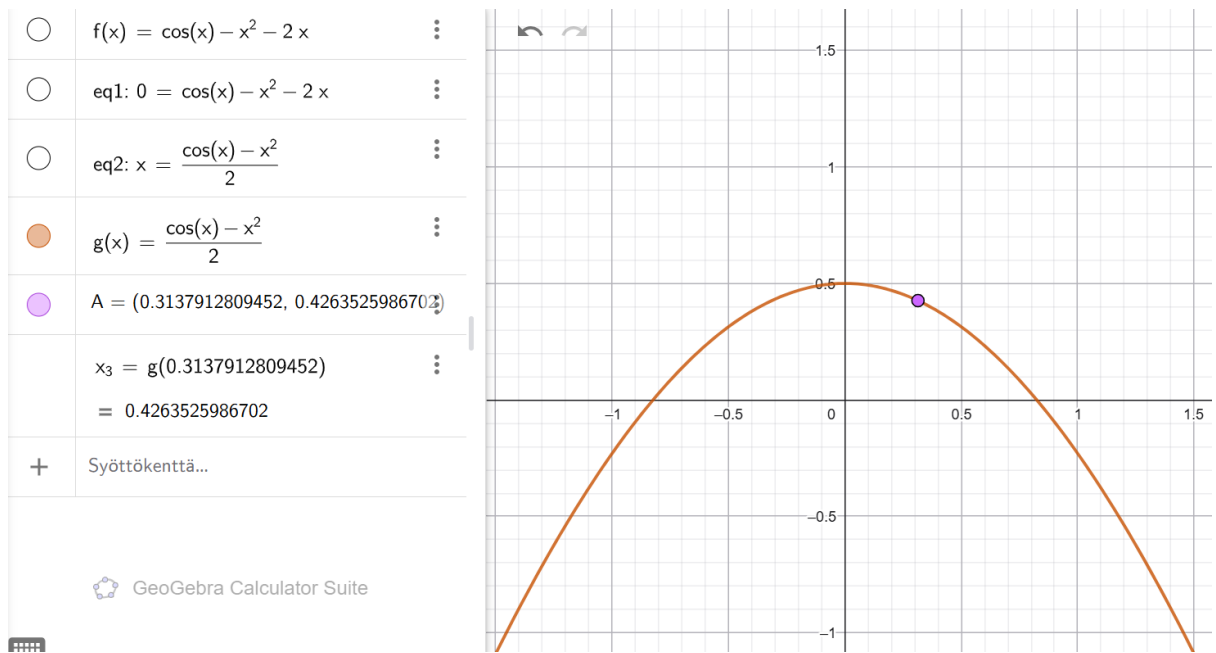
$$x_1 = g(0) = 0.5$$

3. $x_1=0.5$



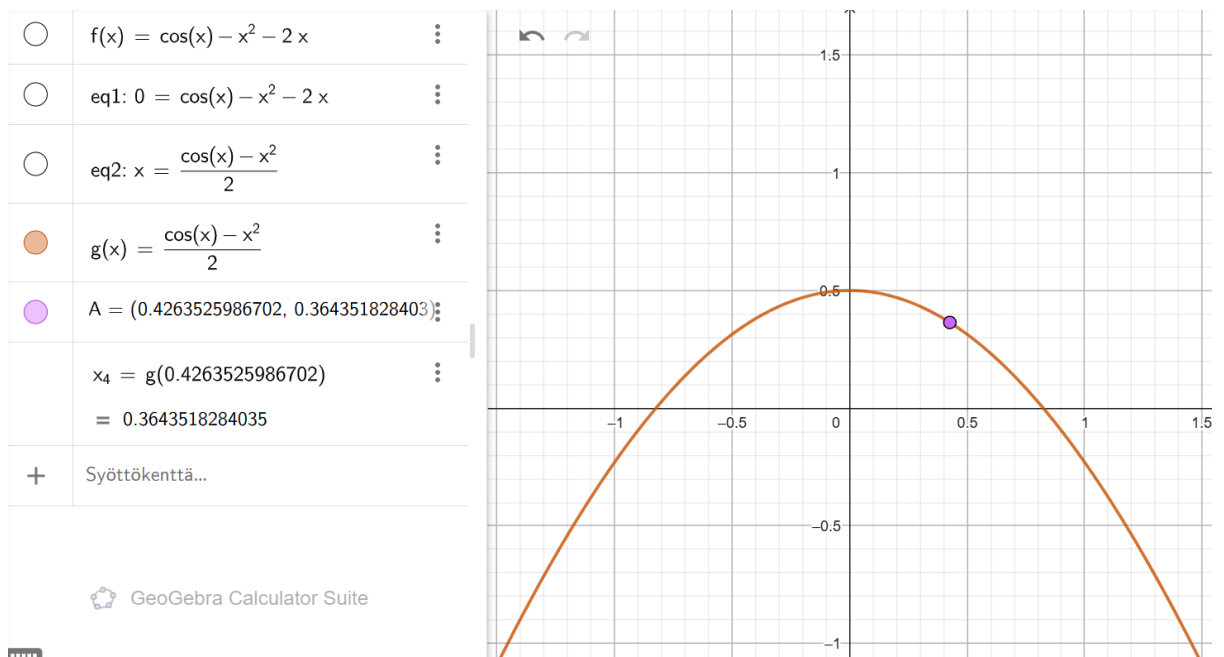
$$x_2 = g(0.5) = 0.3137912809452$$

4. $x_2 = 0.3137912809452$



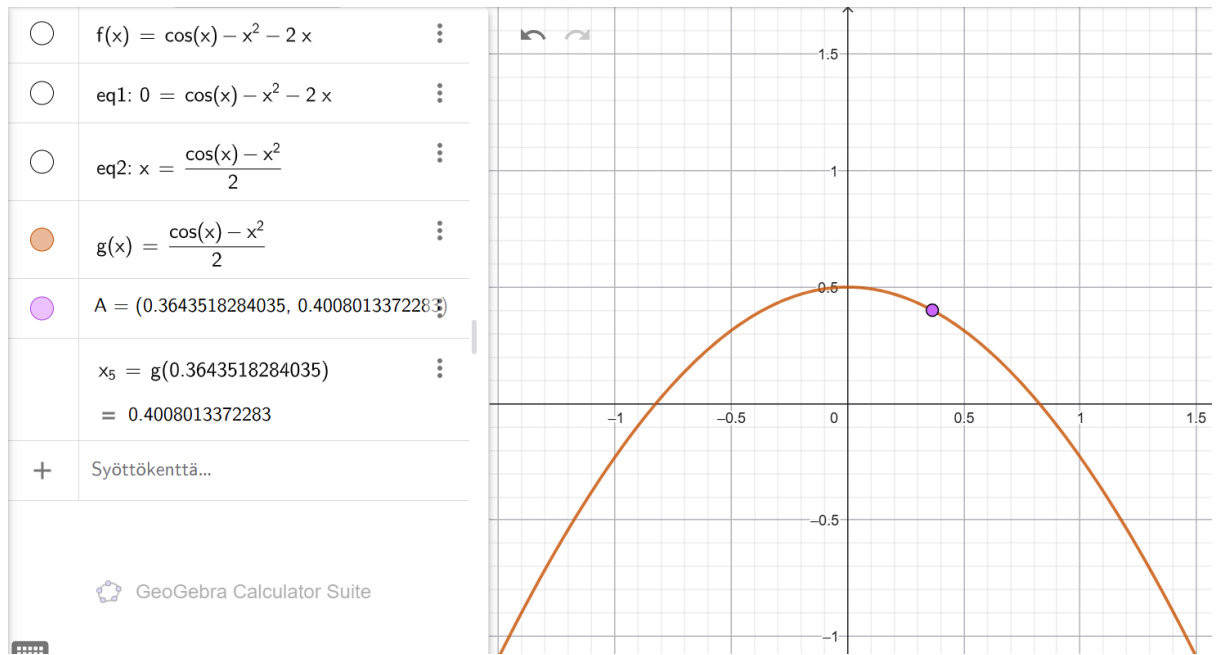
$$x_3 = g(0.3137912809452) = 0.4263525986702$$

5. $x_3 = 0.4263525986702$



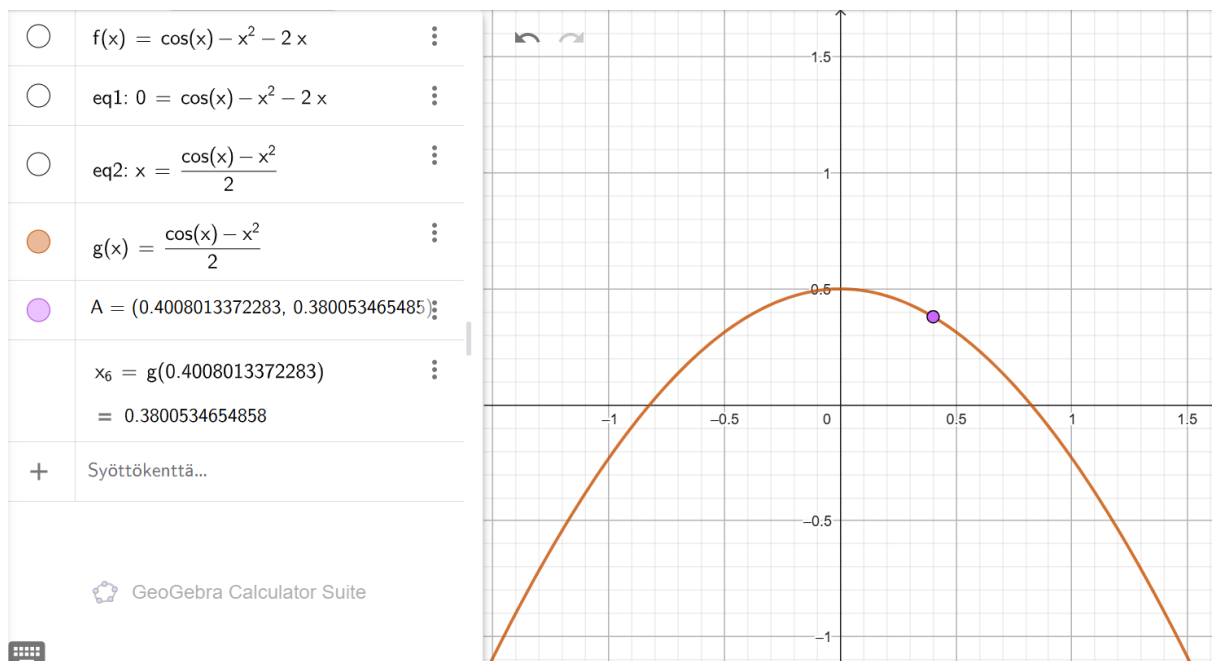
$$x_4 = g(0.4263525986702) = 0.3643518284035$$

6. $x_4 = 0.3643518284035$



$$x_5 = g(0.3643518284035) = 0.4008013372283$$

7. $x_5 = 0.4008013372283$



$$x_6 = g(0.4008013372283) = 0.3800534654858$$

8. Lasketaan loput taulukkolaskennan avulla. Käytetään LibreOfficen Calc.

Soluun A1 asetetaan arvo 0. Soluun A2 kirjoitetaan kaava=(COS(A2)-A2^2)/2.

Tämän jälkeen A2-solun oikeasta alakulmasta vedetään alaspäin, jolloin saadaan peräkkäiset Newtonin menetelmän vaiheet.

Rivinumero (Libre Calc)	Laskun tulos	X _n
1	0	x_0
2	0,50000000000000	x_1
3	0,3137912809452	x_2
4	0,4263525986702	x_3
5	0,3643518284035	x_4
6	0,4008013372283	x_5
7	0,3800534654858	x_6
8	0,3921020830892	x_7
9	0,3851818928866	x_8
10	0,3891825075994	x_9
11	0,3868782638430	x_10
12	0,3882083040461	x_11
13	0,3874415348242	x_12
14	0,3878838938011	x_13
15	0,3876287962108	x_14
16	0,3877759396861	x_15
17	0,3876910771110	x_16
18	0,3877400240690	x_17
19	0,3877117937734	x_18
20	0,3877280761035	x_19
21	0,3877186851194	x_20
22	0,3877241015035	x_21
23	0,3877209775424	x_22
24	0,3877227793277	x_23
25	0,3877217401263	x_24
26	0,3877223394988	x_25

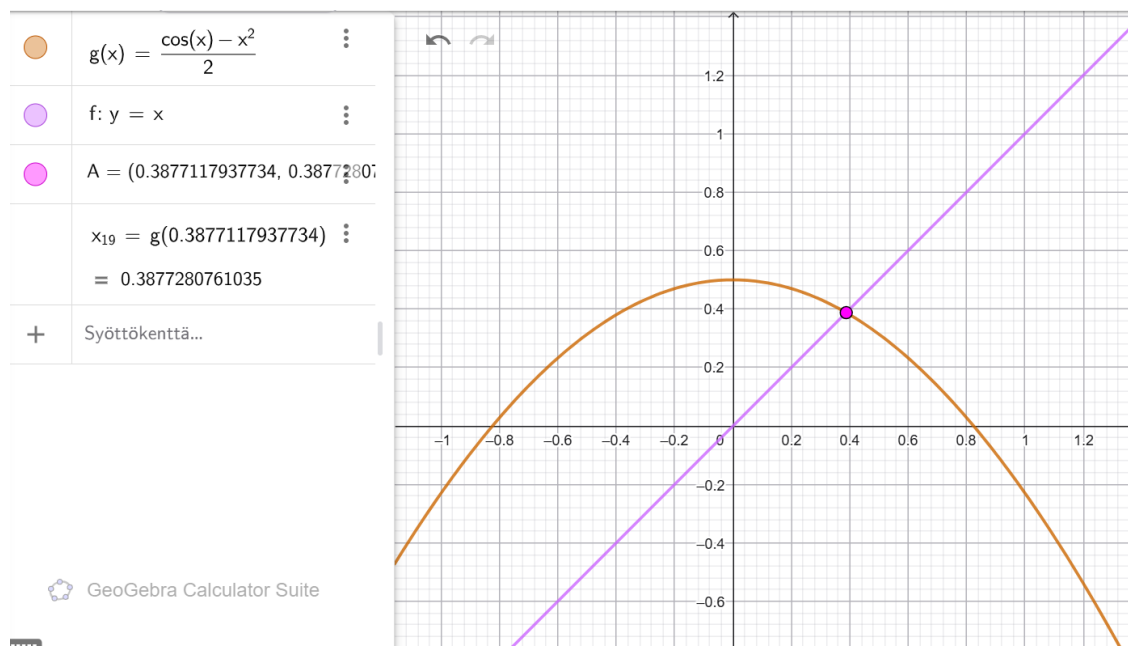
Molemmat ohjelmat on asetettu pyöristämään tulokset kolmeentoista desimaaliin.

GeoGebrassa pyöristyksen asetus löytyy painamalla oikean reunan ylimmästä symbolista. LibreOffice Calcissa pyöristys on toteutettu lisäämällä kaavaan:

=PYÖRISTÄ((COS(A1)-A1^2)/2; 13).

Huomataan, että rivien 19–20 tulokset eivät enää muuta rakennetta 0.3877..., joten likiarvo voidaan pyöristää muotoon 0.39.

Alla tulos esitetään vielä kiintopisteen kautta.



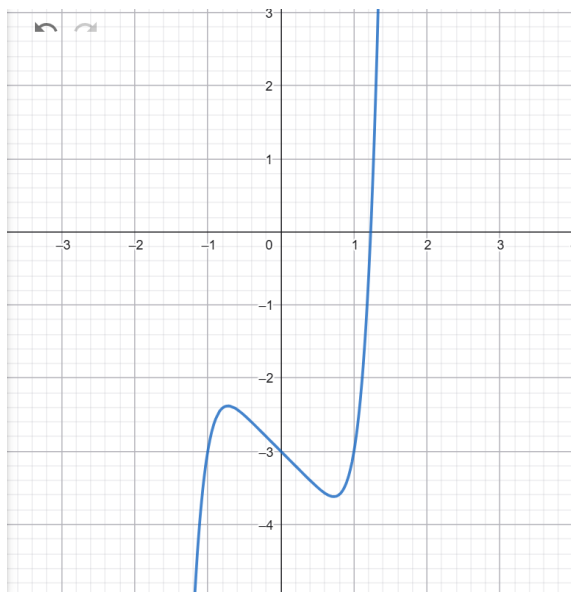
Kuvaselite: Kuvassa on funktio $g(x)$ ja $y = x$. Näiden käyrien leikkauspiste sekä $g(x)$:n arvo ovat merkitty pisteellä A, joka sijaitsee kohdassa, jossa käyrät kohtaavat.

Huomiota

Jos huomataan, ettei lähestytäkään lukua, on aloitusväliä tarpeen pienentää tai kiintopisteen tapauksessa muokata funktiota. Ennen aloittamista onkin hyvä tarkastella funktiota kuvaajan avulla. Koska nollakohtia voi olla useampia, aloitusväli kannattaa rajata riittävän pieneksi, jotta menetelmä etenee kohti haluttua ratkaisua.

”Kiintopistemenetelmässä onnistuminen riippuu alkuarvon valinnasta ja iteroitavan funktion muutosnopeudesta kiintopisteen lähellä.” (SanomaPro)

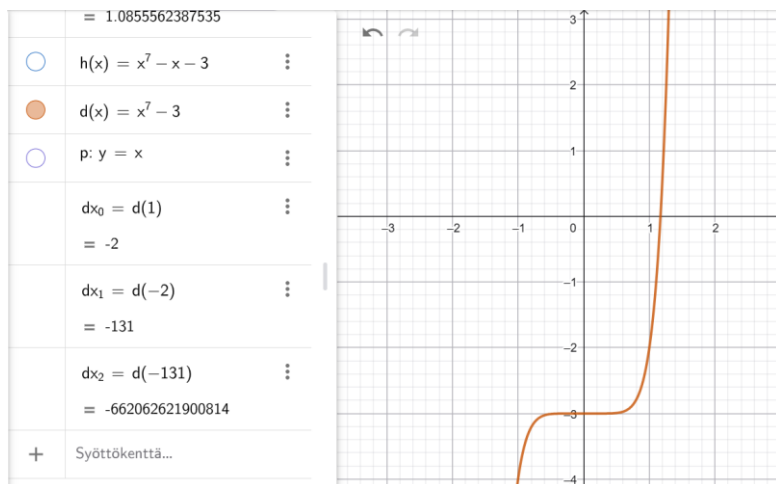
Esimerkiksitapaus: Ratkaise yhtälö $x^7 - x - 3 = 0$ kiintopistemenetelmällä.



Kuvaselite: Kuvaselite: Kuvan funktio on jyrkästi ylöspäin x-akselin kohdalla.

Kuvassa alkuperäinen funktio on hyvin jyrkkä nollakohdan lähellä.

Muokataan funktiota muotoon ja $x = g(x)$ ja $y = x$ tulokseen $g(x) = x^7 - 3$ ja $y = x$



Kuvaselite: Kuvan funktio on jyrkästi ylöspäin x-akselin kohdalla.

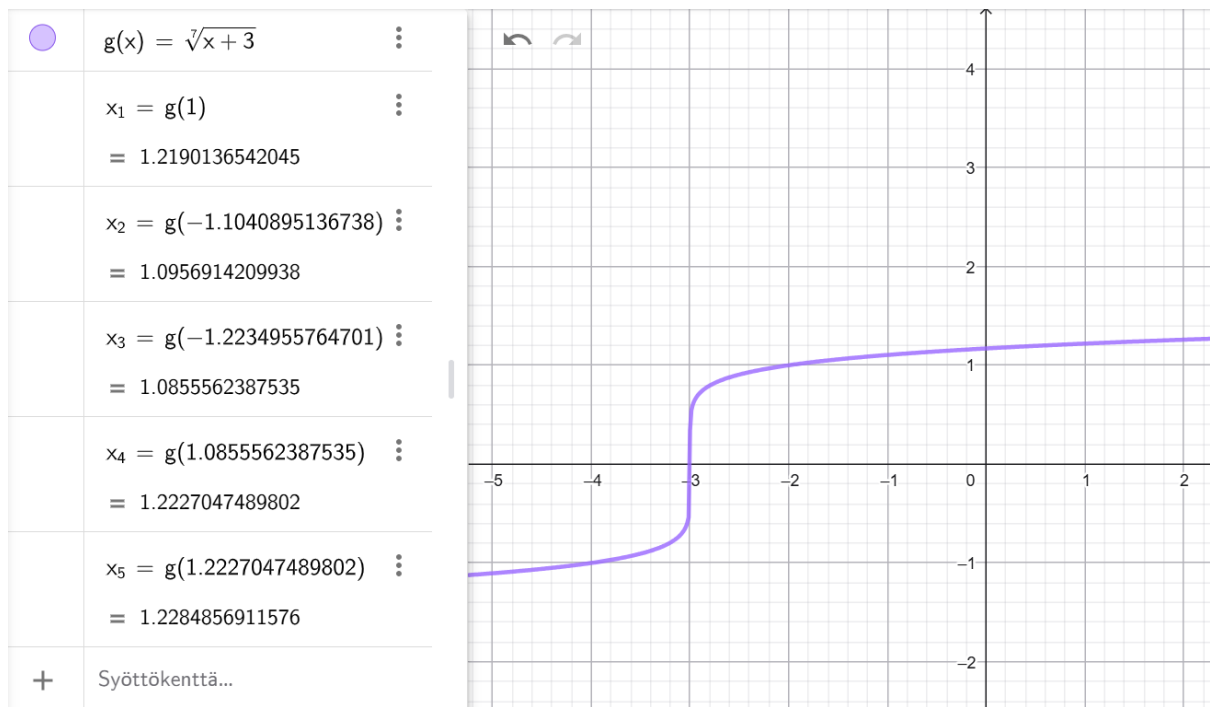
$$dx_0 = d(1) = -2$$

$$dx_1 = d(-2) = -131$$

$$dx_2 = d(-131) = -662062621900814$$

Huomataan, että kiintopisteen kohdalla on liian jyrkkä, eikä tulokset lähene mitään tiettyä arvoa. $g(x)$ on nimetty tässä $d(x)$.

Muotoillaan sama funktio muotoon $g(x) = \sqrt[3]{x+3}$ ja $y = x$



Kuvaselite: Kuvan funktio on jyrkästi vaakasuuntaan y-akselin kohdalla.

$$x_1 = g(1) = 1.2190136542045$$

$$x_2 = g(-1.1040895136738) = 1.0956914209938$$

$$x_3 = g(-1.2234955764701) = 1.0855562387535$$

$$x_5 = g(1.0855562387535) = 1.2227047489802$$

$$x_6 = g(1.2227047489802) = 1.2284856911576$$

Tässä tapauksessa lähestyy jotain tiettyä pistettä eli nollakohtaa.

Tehtävä kiintopisteestä:

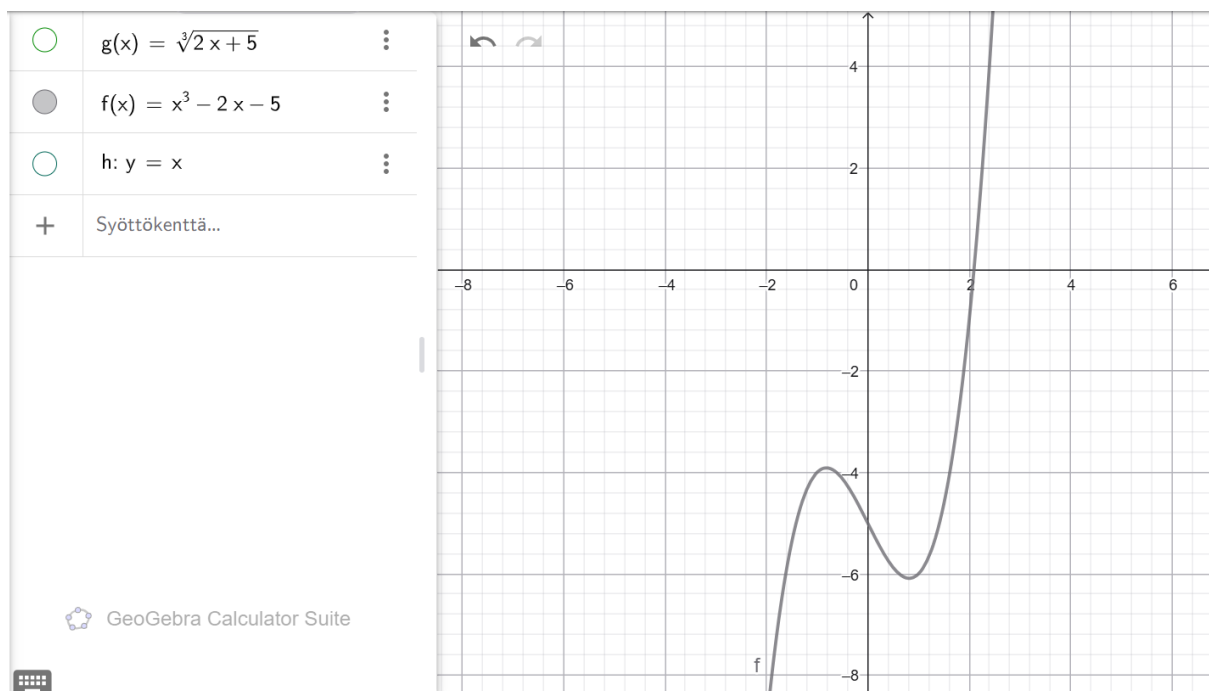
Etsi kiintopistemenetelmällä yhtälön $x^3 - 2x - 5 = 0$ ainoan ratkaisun kolmedesimaalinen likiarvo käyttämällä alkuarvoa $x_0 = 1$

Vinkki: $g(x) = \frac{x^3 - 5}{2}$ ei tuota tulosta.

Ratkaisu: Muokataan yhtälöä muotoon $x = g(x)$ ja $y = x$, mikä olisi

$$g(x) = \sqrt[3]{2x + 5} \text{ ja } y = x$$

Alkuperäinen funktio kuvaajalla:



Kuvaselite: Kuvan funktio on jyrkästi ylöspäin x-akselin kohdalla.

Aloitetaan sijoittamalla $x_0 = 1$

$$x_1 = g(1) = 1.9129311827724$$

$$x_2 = g(1.9129311827724) = 2.0665807683968$$

$$x_3 = g(2.0665807683968) = 2.0902924231445$$

$$x_4 = g(2.0902924231445) = 2.0939040788519$$

$x_5 = g(2.0939040788519) = 2.0944530982024$
$x_6 = g(2.0944530982024) = 2.0945365311936$
$x_7 = g(2.0945365311936) = 2.0945492096986$
$x_8 = g(2.0945492096986) = 2.094551136315$

Huomataan, että viimeiset neljä desimaalia pysyvät samoina, joten arvo voidaan pyöristää muotoon 2.095

Vastaus: $x \approx 2.09$